CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy**
Formy arkusza:	MMAP-P0-100, MMAP-P0-200, MMAP-P0-300, MMAP-P0-400, MMAP-P0-700, MMAP-P0-Q00, MMAP-P0-K00
Termin egzaminu:	24 sierpnia 2026 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Uwaga:
Gdy wymaganie egzaminacyjne dotyczy treści z II etapu edukacyjnego, dopisano „SP”.

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania określone w podstawie programowej[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.1) wykonuje działania ([…] mnożenie, dzielenie, potęgowanie […]) w zbiorze liczb rzeczywistych; I.4) stosuje […] prawa działań na potęgach […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 5. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia […].

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania, tj.

- uzasadnienie, że liczba $3n^2+6n+15$ jest podzielna przez 3 i przez 4
  LUB
- zapisanie, że $n=2l+1$, **oraz** przekształcenie wyrażenia $3n^2+6n+15$ do postaci $12\cdot(l^2+2l+2)$,
  LUB
- przekształcenie wyrażenia $3n^2+6n+15$ do postaci sumy algebraicznej liczb podzielnych przez 12 **oraz** uzasadnienie, że każdy ze składników tej sumy jest podzielny przez 12.

1 pkt – uzasadnienie, że liczba $3n^2+6n+15$ jest podzielna przez 3
ALBO
– uzasadnienie, że liczba $3n^2+6n+15$ jest podzielna przez 4,
ALBO
– zapisanie, że $n=2l+1$, **oraz** przekształcenie wyrażenia $3n^2+6n+15$ do postaci $3(4l^2+4l+1)+6(2l+1)+15$,
ALBO
– przekształcenie wyrażenia $3n^2+6n+15$ do postaci $3(n+1)^2+12$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość tezy tylko dla wybranych wartości n, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający wykazuje, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie $3n^2-6n+15$ (zamiast $3n^2+6n+15$) jest podzielne przez 12, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający przedstawia n w postaci $2l+1$, a następnie przekształca wyrażenie $3n^2+6n+15$ do postaci $12\cdot(l^2+2l+2)$ i kontynuuje rozumowanie, popełniając błędy we wnioskowaniu, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający przyjmuje np. $n=4k+r$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$ i $r\in\{1,3\}$ (lub $n=12k+r$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$ i $r\in\{1,3,5,7,9,11\}$), i przeprowadzi pełne rozumowanie dla wszystkich przypadków, to otrzymuje **2 punkty**.
   Gdy przeprowadzi pełne rozumowanie dla co najmniej połowy przypadków, ale nie przeprowadzi pełnego rozumowania dla wszystkich przypadków, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

5. Jeżeli zdający zapisze równanie $3(n^2+2n+5)=0$, to nie uznaje się tego zapisu jako uzasadnienia podzielności wyrażenia $3n^2+6n+15$ przez 3.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Ponieważ liczba n jest nieparzysta, więc zapisujemy ją w postaci $n=2l+1$, gdzie $l\in\mathbb{Z}$. Wówczas:

$$3n^2+6n+15=3(2l+1)^2+6(2l+1)+15=3(4l^2+4l+1)+12l+6+15=$$
$$=12l^2+12l+3+12l+21=12l^2+24l+24=12\cdot(l^2+2l+2)$$

Ponieważ $l\in\mathbb{Z}$, więc również suma l^2+2l+2 jest liczbą całkowitą.
Zatem iloczyn $12\cdot(l^2+2l+2)$ jest podzielny przez 12. To należało wykazać.

Sposób II

Zapisujemy liczbę $3n^2+6n+15$ w postaci sumy algebraicznej liczb podzielnych przez 12, np.:

$$3n^2+6n+15=3n^2+6n+3+12=3(n^2+2n+1)+12=3(n+1)^2+12$$

Liczba $3(n+1)^2$ jest podzielna przez 3 dla każdej liczby całkowitej n.
Liczba n jest nieparzysta, zatem liczba $n+1$ jest parzysta. Stąd jej kwadrat jest liczbą podzielną przez 4. Zatem liczba $3(n+1)^2$ jest podzielna przez $3\cdot4=12$.

Zatem liczba $3n^2+6n+15=3(n+1)^2+12$ jest również podzielna przez 12 jako suma liczb podzielnych przez 12. To należało wykazać.

Sposób III

Przedstawiamy liczbę $3n^2+6n+15$ w postaci iloczynu:

$$3n^2+6n+15=3\cdot(n^2+2n+5)$$

Zatem liczba $3n^2+6n+15$ jest podzielna przez 3 dla każdej liczby całkowitej n.

Ponieważ liczba n jest nieparzysta, więc zapisujemy ją w postaci $n=2l+1$, gdzie $l\in\mathbb{Z}$. Wówczas:

$$n^2+2n+5=(2l+1)^2+2\cdot(2l+1)+5=4l^2+4l+1+4l+2+5=$$
$$=4l^2+8l+8=4\cdot(l^2+2l+2)$$

Ponieważ $l\in\mathbb{Z}$, więc również suma l^2+2l+2 jest liczbą całkowitą.
Zatem iloczyn $4\cdot(l^2+2l+2)$ jest podzielny przez 4.

Zatem liczba $3n^2+6n+15=3\cdot(n^2+2n+5)$ jest podzielna przez $3\cdot4=12$.
To należało wykazać.

Sposób IV

Przedstawiamy liczbę $3n^2+6n+15$ w postaci iloczynu:

$$3n^2+6n+15=3\cdot(n^2+2n+5)$$

Zatem liczba $3n^2+6n+15$ jest podzielna przez 3 dla każdej liczby całkowitej n.

Zapisujemy liczbę n^2+2n+5 w postaci sumy algebraicznej liczb podzielnych przez 4, np.:

$$n^2+2n+5=n^2+2n+1+4=(n+1)^2+4$$

Liczba n jest nieparzysta, zatem liczba $n+1$ jest parzysta. Stąd jej kwadrat jest liczbą podzielną przez 4. Zatem liczba $n^2+2n+5=(n+1)^2+4$ jest również podzielna przez 4 jako suma liczb podzielnych przez 4.

Zatem liczba $3n^2+6n+15=3\cdot(n^2+2n+5)$ jest podzielna przez $3\cdot 4=12$.
To należało wykazać.

Sposób V

Dla każdej liczby całkowitej n każdy ze składników sumy $3n^2+6n+15$ jest podzielny przez 3, zatem liczba $3n^2+6n+15$ jest podzielna przez 3.

Przedstawiamy liczbę $3n^2+6n+15$ w postaci $3n^2+4n+2n+15$.

Ponieważ liczba n jest nieparzysta, więc liczba n^2 przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1.
Stąd wynika, że liczba $3n^2$ daje przy dzieleniu przez 4 resztę 3.
Liczba $4n$ daje przy dzieleniu przez 4 resztę 0.
Liczba $2n$ daje przy dzieleniu przez 4 resztę 2.
Ponadto liczba 15 daje przy dzieleniu przez 4 resztę 3.

Zatem reszta z dzielenia przez 4 liczby $3n^2+4n+2n+15$ jest równa reszcie z dzielenia przez 4 liczby $3+0+2+3=8$. Liczba 8 jest podzielna przez 4, więc liczba $3n^2+6n+15$ jest również podzielna przez 4.

Zatem liczba $3n^2+6n+15$ jest podzielna przez 3 i 4. Liczby 3 i 4 są względnie pierwsze, więc liczba $3n^2+6n+15$ jest podzielna przez $3\cdot 4=12$. To należało wykazać.

Zadanie 6. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 7. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej. II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 8. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: II.4) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 9. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.4) rozwiązuje […] nierówności kwadratowe.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$

ALBO

– zastosowanie poprawnej metody i przedstawienie zbioru rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziału, np.



1 pkt – obliczenie/zapisanie pierwiastków trójmianu kwadratowego $3x^2 - 2x - 1$:

$x_1 = -\frac{1}{3}$ oraz $x_2 = 1$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Odpowiedź zdającego uznajemy za poprawną tylko wtedy, gdy można w sposób jednoznaczny ustalić, czy przedział zapisany przez zdającego jest otwarty czy domknięty.
2. Jeżeli błędnie obliczony przez zdającego wyróżnik Δ jest niedodatni, to zdający otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający, obliczając pierwiastki trójmianu $3x^2 - 2x - 1$, popełni błędy (ale otrzyma dodatni wyróżnik tego trójmianu i dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionych błędów zapisze zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający rozpatruje inny niż podany w zadaniu trójmian kwadratowy, który nie wynika z błędu przekształcenia (np. $3x^2 - 2x$), i w konsekwencji rozpatruje inną nierówność (np. $3x^2 - 2x < 0$), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
5. Jeżeli zdający poda zbiór rozwiązań w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziału i jednocześnie zapisze niewłaściwy przedział jako zbiór rozwiązań, (np. $x \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$), to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający spełni kryterium za 1 punkt, a następnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $\left(1, -\frac{1}{3}\right)$, to otrzymuje **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapisujemy nierówność w postaci $3x^2 - 2x - 1 < 0$ i obliczamy miejsca zerowe funkcji kwadratowej $y = 3x^2 - 2x - 1$.

Obliczamy wyróżnik trójmianu $3x^2 - 2x - 1$:

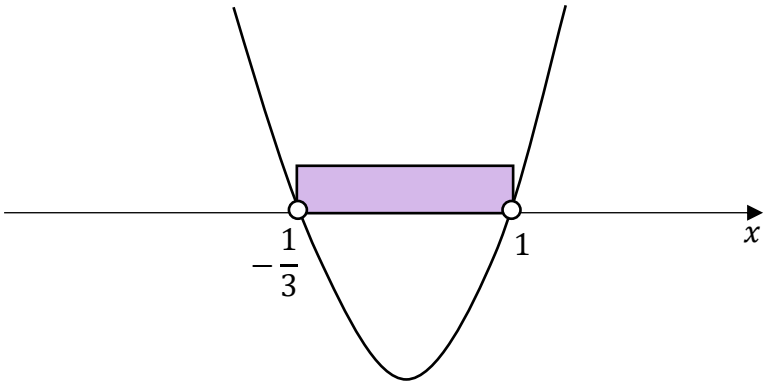
$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16$$

Stąd:

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = 1$$

Szkicujemy wykres funkcji kwadratowej $y = 3x^2 - 2x - 1$.
Ponieważ współczynnik przy drugiej potędze zmiennej x jest dodatni, więc wykresem funkcji $y = 3x^2 - 2x - 1$ jest parabola skierowana ramionami do góry.
Odczytujemy argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.



Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$.

Zadanie 10. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: IV.2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $8{,}30$ zł.

1 pkt – zapisanie układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi pozwalającego obliczyć cenę czekolady i cenę batona, np.
$8x + 4y = 82$ oraz $3x + 9y = 60$
ALBO
– zapisanie równania z jedną niewiadomą pozwalającego obliczyć cenę czekolady, np.
$3x + 9 \cdot (20{,}5 - 2x) = 60$,
ALBO
– zapisanie równania z jedną niewiadomą pozwalającego obliczyć cenę batona, np.
$3 \cdot (10{,}25 - 0{,}5y) + 9y = 60$,
ALBO
– obliczenie kosztu zakupu 6 czekolad i 3 batonów: $61{,}50$ zł **oraz** obliczenie kosztu zakupu 1 czekolady i 3 batonów: 20 zł.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający sprawdza warunki zadania dla wybranych par liczb x oraz y i wskaże właściwą odpowiedź, ale nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie zadania, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Po uwzględnieniu warunków zadania otrzymujemy:

$$8x + 4y = 82 \quad \text{oraz} \quad 3x + 9y = 60$$

Z pierwszego z tych równań wyznaczamy $y = 20{,}5 - 2x$ i podstawiamy w miejsce y do drugiego z równań, w wyniku czego otrzymujemy:

$$3x + 9 \cdot (20{,}5 - 2x) = 60$$
$$3x + 184{,}5 - 18x = 60$$
$$15x = 124{,}5$$
$$x = 8{,}3$$

Czekolada kosztuje $8{,}30$ zł.

Sposób II

Jeśli 8 czekolad i 4 batony kosztują łącznie 82 zł, to 2 czekolady i 1 baton kosztują $\frac{82}{4} = 20{,}50$ zł. Wobec tego za 6 takich czekolad i 3 takie batony zapłacimy $3 \cdot 20{,}50 = 61{,}50$ zł.

Wiemy też, że 3 czekolady i 9 batonów kosztują łącznie 60 zł, więc za 1 taką czekoladę i 3 takie batony zapłacimy $\frac{60}{3} = 20$ zł.

Zatem za 5 czekolad zapłacimy $61{,}50 - 20 = 41{,}50$ zł.

Stąd wynika, że jedna czekolada kosztuje $\frac{41{,}50}{5} = 8{,}30$ zł.

Zadanie 11. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: […] zbiór wartości, […] przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości […] mniejsze (nie większe) od danej liczby […] oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne uzupełnienie trzech zdań.
2 pkt – poprawne uzupełnienie dwóch zdań.
1 pkt – poprawne uzupełnienie jednego zdania.
0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Uwaga:

Uzupełnienie zdania uznaje się za poprawne tylko wtedy, gdy zapisane krańce przedziału są poprawne i można jednoznacznie ustalić, czy przedział zapisany przez zdającego jest otwarty czy domknięty.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej przy zachowaniu poprawnych krańców przedziału, np. zapisze, że zbiorem wartości funkcji f jest przedział $[1, -3]$, to otrzymuje **1 punkt** za tak uzupełnione zdanie.

Rozwiązanie

1. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $[-3, 1]$.

2. Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne, jest przedział $(-2, 4)$.

3. Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje największą wartość, jest przedział $(-5, -3]$.

Zadanie 12. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej. III.4) rozwiązuje równania […] kwadratowe.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $m = -3$.

1 pkt – zapisanie równania z niewiadomą m: $m^2 + 6m = -9$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający zapisze, że $m = -3$, ale nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie zadania, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ponieważ wykres funkcji f przecina oś Oy w punkcie $(0, -9)$, więc $f(0) = -9$.
Stąd otrzymujemy:

$$5 \cdot 0 + m^2 + 6m = -9$$

$$m^2 + 6m + 9 = 0$$

$$(m + 3)^2 = 0$$

Zatem $m = -3$.

Zadanie 13.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci […] kanonicznej […]; V.11) wykorzystuje własności funkcji […] kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
FP

Zadanie 13.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2. V.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 14.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 14.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący; VI.4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 15. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VI.5) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. IV.1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi […].

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawne wyniki: $a_1 = 36$ oraz $r = -6$.

2 pkt – zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć a_1 i r, np.

$$\frac{2a_1 + 9r}{2} \cdot 10 = 90 \quad \text{oraz} \quad \frac{a_1 + a_1 + 6r + a_1 + 7r}{3} = 10.$$

1 pkt – zapisanie jednego równania z dwiema niewiadomymi a_1 i r, np.:

$$\frac{2a_1 + 9r}{2} \cdot 10 = 90,$$

$$\frac{a_1 + a_1 + 6r + a_1 + 7r}{3} = 10$$

ALBO

– zapisanie związków:

$$\frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 90 \quad \text{oraz} \quad a_{10} = a_1 + 9r,$$

ALBO

– zapisanie związków:

$$\frac{a_1 + a_7 + a_8}{3} = 10 \quad \text{oraz} \quad a_7 = a_1 + 6r \quad \text{oraz} \quad a_8 = a_1 + 7r \text{ (lub } a_8 = a_7 + r).$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający myli ciąg arytmetyczny z geometrycznym, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.
2. Jeżeli zdający błędnie interpretuje liczbę 90 jako dziesiąty wyraz ciągu, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający błędnie interpretuje średnią arytmetyczną i zapisuje równanie $\frac{a_1 + a_7 + a_8}{2} = 10$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli jedynym błędem zdającego jest zastosowanie błędnego wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego i rozwiązanie zostanie doprowadzone konsekwentnie do końca, to zdający może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Po uwzględnieniu warunków zadania otrzymujemy:

$$S_{10} = 90 \quad \text{oraz} \quad \frac{a_1 + a_7 + a_8}{3} = 10$$

Korzystamy ze wzorów na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy układ równań z dwiema niewiadomymi a_1 i r (gdzie r jest różnicą ciągu arytmetycznego (a_n)):

$$\frac{2a_1 + 9r}{2} \cdot 10 = 90 \quad \text{oraz} \quad \frac{a_1 + a_1 + 6r + a_1 + 7r}{3} = 10$$

Przekształcamy ten układ równoważnie i otrzymujemy:

$$2a_1 + 9r = 18 \quad \text{oraz} \quad 3a_1 + 13r = 30$$

Z pierwszego z tych równań wyznaczamy $a_1 = 9 - \frac{9}{2}r$ i podstawiamy w miejsce a_1 do drugiego z równań, w wyniku czego otrzymujemy:

$$3 \cdot \left(9 - \frac{9}{2}r\right) + 13r = 30$$

$$27 - \frac{27}{2}r + 13r = 30$$

$$-\frac{1}{2}r = 3$$

$$r = -6$$

Zatem:

$$a_1 = 9 - \frac{9}{2} \cdot (-6) = 36$$

Pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy 36, a różnica tego ciągu jest równa (-6).

Zadanie 16. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.7) wykorzystuje własności ciągów […] geometrycznych, do rozwiązywania zadań […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 17. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 18. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 19. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.12) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $|AD| = 25$.

3 pkt – obliczenie wysokości trapezu (lub jej kwadratu) **oraz** obliczenie długości odcinka AE:
$h = 15$ (lub $h^2 = 225$) oraz $|AE| = 20$
ALBO
– zapisanie równania z jedną niewiadomą c, np. $c^2 = 56^2 + 39^2 - 2 \cdot 56 \cdot 39 \cdot \frac{12}{13}$.

2 pkt – obliczenie wysokości trapezu (lub jej kwadratu): $h = 15$ (lub $h^2 = 225$)
ALBO
– obliczenie długości odcinka EB **oraz** obliczenie długości odcinka AE: $|EB| = 36$ oraz $|AE| = 20$,
ALBO
– zapisanie układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi a oraz b prowadzącego do obliczenia długości podstaw trapezu, np.
$a - b = 40$ oraz $\frac{a+b}{2} = 36$,
ALBO
– zapisanie układu trzech równań z trzema niewiadomymi prowadzącego do obliczenia długości ramienia trapezu, np.

$c^2 = a^2 + 39^2 - 2 \cdot a \cdot 39 \cdot \frac{12}{13}$ oraz

$c^2 = b^2 + 39^2 - 2 \cdot b \cdot 39 \cdot \frac{12}{13}$ oraz

$a - b = 40.$

1 pkt – obliczenie długości odcinka EB: $|EB| = 36$

ALBO

– obliczenie długości odcinka AE: $|AE| = 20$,

ALBO

– obliczenie sinusa kąta α: $\sin\alpha = \frac{5}{13}$,

ALBO

– zapisanie, że $|\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle ABD|$, **oraz** zapisanie jednego z równań:

$c^2 = a^2 + 39^2 - 2 \cdot a \cdot 39 \cdot \frac{12}{13}$ lub $c^2 = b^2 + 39^2 - 2 \cdot b \cdot 39 \cdot \frac{12}{13}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

a) zastosowanie niepoprawnej definicji jednej funkcji trygonometrycznej,

b) błędne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa,

c) błędne zastosowanie twierdzenia cosinusów,

d) zastosowanie niepoprawnej tożsamości $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$,

i rozwiązanie zostanie doprowadzone konsekwentnie do końca, to zdający może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Jeżeli zdający popełni więcej niż jeden z wymienionych błędów a)–d), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

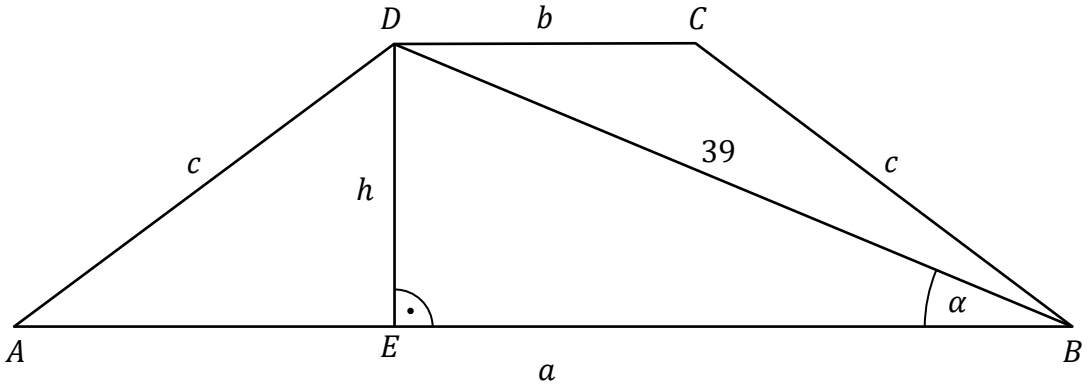
2. Jeżeli zdający przyjmie, że kąt BDA jest prosty, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

Przykładowe pełne rozwiązania

We wszystkich poniższych rozwiązaniach przyjmujemy następujące oznaczenia (zobacz rysunek):

- $a = |AB|$
- $b = |CD|$
- $c = |AD| = |BC|$
- E – spodek wysokości trapezu $ABCD$ poprowadzonej z wierzchołka D
- $h = |DE|$.

Zauważmy, że $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ i $h > 0$.



Sposób I

Z treści zadania wiemy, że $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, więc:

$$\frac{|EB|}{|BD|} = \frac{12}{13}$$

Zatem:

$$|EB| = \frac{12}{13} \cdot 39 = 36$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta EBD obliczamy wysokość trapezu $ABCD$:

$$h = |DE| = \sqrt{|BD|^2 - |EB|^2} = \sqrt{39^2 - 36^2} = \sqrt{225} = 15$$

Długości podstaw trapezu różnią się o 40, stąd otrzymujemy długość odcinka AE:

$$|AE| = \frac{a-b}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AED obliczamy długość ramienia trapezu:

$$c = |AD| = \sqrt{|AE|^2 + |DE|^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = \sqrt{625} = 25$$

Sposób II

Korzystamy z „jedynki trygonometrycznej” i obliczamy $\sin\alpha$:

$$\sin^2\alpha+\left(\frac{12}{13}\right)^2=1$$

$$\sin^2\alpha+\frac{144}{169}=1$$

$$\sin^2\alpha=\frac{25}{169}$$

Ponieważ kąt α jest ostry, zatem $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, więc:

$$\frac{|DE|}{|BD|}=\frac{5}{13}$$

$$\frac{h}{39}=\frac{5}{13}$$

$$h=15$$

Długości podstaw trapezu różnią się o 40, stąd otrzymujemy długość odcinka AE:

$$|AE|=\frac{a-b}{2}=\frac{40}{2}=20$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AED obliczamy długość ramienia trapezu:

$$c=|AD|=\sqrt{|AE|^2+|DE|^2}=\sqrt{20^2+15^2}=\sqrt{625}=25$$

Sposób III

Z treści zadania wiemy, że $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, więc:

$$\frac{|EB|}{|BD|}=\frac{12}{13}$$

Zatem:

$$|EB|=\frac{12}{13}\cdot 39=36$$

Z własności trapezu równoramiennego oraz z tego, że długości podstaw różnią się o 40, otrzymujemy:

$$\frac{a+b}{2}=36 \quad \text{oraz} \quad a-b=40$$

Stąd:

$$a+b=72 \quad \text{oraz} \quad a-b=40$$

Dodajemy stronami równania układu i otrzymujemy:

$$(a+b)+(a-b)=72+40$$

$$2a=112$$

$$a=56$$

Korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABD i obliczamy długość ramienia trapezu:

$$|AD|^2=|AB|^2+|BD|^2-2\cdot|AB|\cdot|BD|\cdot\cos\alpha$$

$$c^2=a^2+39^2-2\cdot a\cdot 39\cdot\cos\alpha$$

$$c^2=56^2+39^2-2\cdot 56\cdot 39\cdot\frac{12}{13}$$

$$c^2=3136+1521-4032$$

$$c^2=625$$

$$c=25$$

Sposób IV

Kąty naprzemianległe ABD i CDB mają równe miary, gdyż $AB||CD$, zatem $\cos(|\sphericalangle CDB|)=\frac{12}{13}$.

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABD i dla trójkąta BCD otrzymujemy:

$$|AD|^2=|AB|^2+|BD|^2-2\cdot|AB|\cdot|BD|\cdot\cos\alpha$$

$$|BC|^2=|CD|^2+|BD|^2-2\cdot|CD|\cdot|BD|\cdot\cos(|\sphericalangle CDB|)$$

czyli:

$$c^2=a^2+39^2-2\cdot a\cdot 39\cdot\frac{12}{13}\quad\text{oraz}\quad c^2=b^2+39^2-2\cdot b\cdot 39\cdot\frac{12}{13}$$

Stąd:

$$c^2=a^2+39^2-72a\quad\text{oraz}\quad c^2=b^2+39^2-72b$$

Odejmujemy te równania stronami i otrzymujemy:

$$c^2-c^2=(a^2+39^2-72a)-(b^2+39^2-72b)$$

$$a^2+39^2-72a-b^2-39^2+72b=0$$

$$a^2-b^2-72a+72b=0$$

$$(a-b)(a+b)-72(a-b)=0$$

Ponieważ $a\neq b$, więc możemy obie strony tego równania podzielić przez $a-b$. Otrzymujemy wtedy:

$$a+b-72=0$$

Z treści zadania wynika, że $a=b+40$. Zatem:

$$(b + 40) + b - 72 = 0$$

$$2b = 32$$

$$b = 16$$

Stąd i z równania $c^2 = b^2 + 39^2 - 72b$ otrzymujemy długość ramienia:

$$c^2 = 16^2 + 39^2 - 72 \cdot 16$$

$$c^2 = 256 + 1521 - 1152$$

$$c^2 = 625$$

$$c = 25$$

Zadanie 20. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.4) oblicza kąty trójkąta prostokątnego i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty prostokątne, w tym z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 21. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 22.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich, jak np. przechodzenie przez dwa dane punkty […]).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 22.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych. VII.1) wykorzystuje definicje funkcji: […] tangens dla kątów od $0°$ do $180°$ […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 23.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: SP X. Oś liczbowa. Układ współrzędnych na płaszczyźnie. 4) znajduje środek odcinka, którego końce mają dane współrzędne (całkowite lub wymierne) oraz znajduje współrzędne drugiego końca odcinka, gdy dany jest jeden koniec i środek.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 23.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych; IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 24. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich, jak np. […] równoległość do innej prostej).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 25. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: X.5) oblicza objętości […] graniastosłupów […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 26. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: X.2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną […]. VIII.12) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 27. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: SP XI. Geometria przestrzenna. 1) rozpoznaje […] ostrosłupy […]. XI.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 28. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 29. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: XII.2) […] znajduje medianę i dominantę; XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne uzupełnienie trzech zdań.
2 pkt – poprawne uzupełnienie dwóch zdań.
1 pkt – poprawne uzupełnienie jednego zdania.
0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Uwaga:

Nie akceptuje się zaokrągleń otrzymanych wyników.

Rozwiązanie

1. Mediana deklarowanej liczby godzin snu przez osoby uczestniczące w ankiecie jest równa $7{,}5$.

2. Dominanta deklarowanej liczby godzin snu przez osoby uczestniczące w ankiecie jest równa 8.

3. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że jedna osoba wybrana losowo spośród ankietowanych zadeklarowała 10 godzin snu, jest równe $\frac{12}{120}$.

Zadanie 30. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XIII) rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawne wyniki, np.
$P(r) = 2\pi r \cdot (10 - 2r)$ oraz $D = (0, 5)$ oraz $r = \frac{5}{2}$.

3 pkt – wyznaczenie poprawnego wzoru na pole powierzchni bocznej rozważanego walca w zależności od zmiennej r **oraz** wyznaczenie dziedziny D tej funkcji, np.
$P(r) = 2\pi r \cdot (10 - 2r)$ oraz $D = (0, 5)$
ALBO
– wyznaczenie poprawnego wzoru na pole powierzchni bocznej rozważanego walca w zależności od zmiennej r (bez wyznaczonej dziedziny funkcji P) **oraz** prawidłowe obliczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka wykresu funkcji P, np.
$P(r) = 2\pi r \cdot (10 - 2r)$ oraz $r = \frac{5}{2}$.

2 pkt – wyznaczenie poprawnego wzoru na pole powierzchni bocznej rozważanego walca w zależności od zmiennej r (bez wyznaczonej dziedziny funkcji P), np.
$P(r) = 2\pi r \cdot (10 - 2r)$
ALBO
– zapisanie zależności między r i H **oraz** wyznaczenie zakresu zmienności r, np.
$2r + H = 10$ oraz $r \in (0, 5)$.

1 pkt – zapisanie zależności między r i H, np. $2r + H = 10$
ALBO
– wyznaczenie zakresu zmienności r: $r \in (0, 5)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający nie zapisze zależności między r i H oraz nie zapisze pola powierzchni bocznej walca w postaci $P(r) = 2\pi r(10 - 2r)$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie (za zapisanie zakresu zmienności r: $r \in (0, 5)$).

2. Jeżeli zdający nie zapisze pola powierzchni bocznej walca jako funkcji P zmiennej r, a jedynie obliczy wartości pola dla wybranych promieni podstawy walca i w oparciu o te rachunki wskaże największą wartość pola, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

3. Jeżeli zdający zapisze błędną zależność $r + H = 10$, ale rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za

konsekwentne wyznaczenie wzoru funkcji P oraz za konsekwentne wyznaczenie argumentu, dla którego pole powierzchni bocznej jest największe).

4. Jeżeli zdający zamiast funkcji $P(r)$ rozważa w całym rozwiązaniu funkcję postaci $\frac{1}{2}\cdot P(r)$ albo $\frac{1}{\pi}\cdot P(r)$, albo $\frac{1}{2\pi}\cdot P(r)$, albo funkcję pola powierzchni bocznej w zależności od wysokości walca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (za związek $2r+H=10$, za wyznaczenie dziedziny funkcji i za poprawne wyznaczenie argumentu, dla którego pole powierzchni bocznej jest największe).

5. Jeżeli zdający stosuje rachunek różniczkowy i nie uzasadni, że w punkcie będącym miejscem zerowym pochodnej funkcji P jest największa wartość funkcji P, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
Za poprawne uzasadnienie, że w punkcie będącym miejscem zerowym pochodnej funkcji P jest największa wartość funkcji P, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej (np. szkicuje wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznacza na rysunku, np. znakami „+” i „-”, znak pochodnej), **oraz**:
– opisuje przedziały monotoniczności funkcji P (słownie lub graficznie – np. przy użyciu strzałek)
LUB
– zapisuje, że dla wyznaczonego miejsca zerowego pochodnej, funkcja P ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie jej największa wartość,
LUB
– zapisuje, że dla wyznaczonego miejsca zerowego pochodnej, funkcja P ma maksimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.

Przykładowe pełne rozwiązanie
Z warunków zadania otrzymujemy:

$$2r+H=10$$

$$H=10-2r$$

Pole P powierzchni bocznej walca jest równe:

$$P=2\pi rH$$

więc wzór funkcji P zmiennej r ma postać:

$$P(r)=2\pi r\cdot(10-2r)$$

$$P(r)=-4\pi r^2+20\pi r$$

Wyznaczamy dziedzinę funkcji P. Z warunków zadania wynika, że:

$$r>0 \text{ oraz } H=10-2r>0$$

Zatem:

$$r>0 \text{ oraz } r<5$$

Zmienna r może przyjmować wartości z przedziału $(0,5)$.
Ponieważ we wzorze funkcji P współczynnik przy drugiej potędze zmiennej r jest ujemny, więc wykresem funkcji P jest fragment paraboli skierowanej ramionami do dołu.

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka tej paraboli:

$$p = \frac{-20\pi}{2 \cdot (-4\pi)} = \frac{5}{2} \in (0, 5)$$

Zatem funkcja P przyjmuje wartość największą dla argumentu $\frac{5}{2}$.

Ocena prac osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Obowiązują zasady oceniania stosowane przy sprawdzaniu prac zdających bez stwierdzonej dyskalkulii z dodatkowym uwzględnieniem:

I. **ogólnych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią (punkty 1.–12.);
II. dodatkowych **szczegółowych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią – egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, termin poprawkowy 2026.

I. **Ogólne zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

1. Nie należy traktować jako błędy merytoryczne pomyłek wynikających z:
   - błędnego przepisania
   - przestawienia cyfr
   - zapisania innej cyfry, ale o podobnym wyglądzie
   - przestawienia położenia przecinka
   - przestawienia położenia znaku liczby.
2. W przypadku błędów wynikających ze zmiany znaku liczby należy w każdym zadaniu oddzielnie przeanalizować, czy zdający opanował inne umiejętności, poza umiejętnościami rachunkowymi, oceniane w zadaniu. W przypadku opanowania badanych umiejętności zdający powinien otrzymać przynajmniej 1 punkt.
3. We wszystkich zadaniach otwartych, w których wskazano poprawną metodę rozwiązania, części lub całości zadania, zdającemu należy przyznać przynajmniej 1 punkt, zgodnie z kryteriami do poszczególnych zadań.
4. Jeśli zdający przedstawia nieprecyzyjne zapisy, na przykład pomija nawiasy lub zapisuje nawiasy w niewłaściwych miejscach, ale przeprowadza poprawne rozumowanie lub stosuje właściwą strategię, to może otrzymać przynajmniej 1 punkt za rozwiązanie zadania.
5. W przypadku zadania wymagającego wyznaczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi poprawną metodę wyznaczania pierwiastków trójmianu kwadratowego, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
6. W przypadku zadania wymagającego rozwiązania nierówności kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli stosuje poprawny algorytm rozwiązywania nierówności kwadratowej, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
7. W przypadku zadania wymagającego stosowania własności funkcji kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt za wykorzystanie konkretnych własności funkcji kwadratowej, istotnych przy poszukiwaniu rozwiązania.

8. W przypadku zadania wymagającego zastosowania własności ciągów arytmetycznych lub geometrycznych zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi wykorzystanie takiej własności ciągu, która umożliwia znalezienie rozwiązania zadania.
9. W przypadku zadania wymagającego analizowania figur geometrycznych na płaszczyźnie kartezjańskiej zdający może otrzymać punkty, jeżeli przy poszukiwaniu rozwiązania przedstawi poprawne rozumowanie, wykorzystujące własności figur geometrycznych, lub zapisze zależności pozwalające rozwiązać zadanie.
10. W przypadku zadania z rachunku prawdopodobieństwa zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeśli przy wyznaczaniu liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających rozważanemu zdarzeniu przyjmuje określoną regularność lub podaje prawidłową metodę wyznaczenia tej liczby zdarzeń elementarnych.
11. W przypadku zadania z geometrii zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeżeli podaje poprawną metodę wyznaczenia długości odcinka potrzebnej do znalezienia rozwiązania.
12. W przypadku zadania wymagającego przeprowadzenia dowodu (z zakresu algebry lub geometrii), jeśli w przedstawionym rozwiązaniu zdający powoła się na własność, która wyznacza istotny postęp, prowadzący do przeprowadzenia dowodu, to może otrzymać 1 punkt.

II. Dodatkowe **szczegółowe zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Zadanie 5.

Uwaga:

Nie stosuje się uwagi 5. z zasad oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 9.

1 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego $3x^2 - 2x - 1$, tzn. zastosowanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i obliczenie tych pierwiastków,

ALBO

– konsekwentne (do otrzymanego w wyniku popełnienia błędów o charakterze dyskalkulicznym ujemnego lub równego zero wyróżnika) narysowanie paraboli,

ALBO

– poprawne rozwiązanie nierówności $3x^2 - 2x < 0$ (tzn. stosuje się punkt 6. ogólnych zasad oceniania),

ALBO

– konsekwentne (do wyznaczonych przez siebie pierwiastków oraz do rozpatrywanego trójmianu i nierówności) wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności.

Uwagi:

1. Nie stosuje się uwag 2., 4. i 5. z zasad oceniania arkusza standardowego.

2. Akceptowane jest zapisanie pierwiastków trójmianu w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi.

Zadanie 10.

1 pkt – zapisanie równania $8x + 4y = 82$

ALBO

– zapisanie równania $3x + 9y = 60$.

Zadanie 11.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 12.

1 pkt – zapisanie, że $f(0) = -9$.

Zadanie 15.

1 pkt – zapisanie jednego z równań:

- $\frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 90$
- $\frac{a_1 + a_7 + a_8}{3} = 10$
- $a_7 = a_1 + 6r$
- $a_8 = a_1 + 7r$
- $a_{10} = a_1 + 9r$

Zadanie 19.

1 pkt – zastosowanie definicji cosinusa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym i zapisanie równania z jedną niewiadomą (długością odcinka $|EB|$), np. $\frac{|EB|}{39} = \frac{12}{13}$.

Zadanie 29.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 30.

2 pkt – zapisanie zależności między r i H **oraz** zapisanie wzoru na pole powierzchni bocznej walca, np. $2r + H = 10$ oraz $P = 2\pi rH$.