CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy**
Formy arkusza:	EMAP-P0-100, EMAP-P0-200
Termin egzaminu:	2 czerwca 2026 r.

Uwaga:
Gdy wymaganie egzaminacyjne dotyczy treści z III etapu edukacyjnego, dopisano „G”.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania określone w podstawie programowej[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.4) […] stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 27 sierpnia 2012 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. z 2012 r. poz. 977, z późn. zm., tj. Dz.U. z 2014 r. poz. 803, Dz.U. z 2016 r. poz. 895).

Zadanie 3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.6) wykorzystuje definicję logarytmu […]; 1.5) wykorzystuje podstawowe własności potęg […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G6.6) wyłącza wspólny czynnik z wyrazów sumy algebraicznej poza nawias. 2.1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 5. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 6. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: G7.7) za pomocą równań lub układów równań opisuje i rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 7. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji ([…] miejsca zerowe […]).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 8. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji ([…] punkty, w których funkcja przyjmuje […] wartość największą […]).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 9. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę […]).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 10. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.7) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 11. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 12. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.3) stosuje wzór na n-ty wyraz […] ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 13. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 5.4) stosuje wzór na n-ty wyraz […] ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 14. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 7.4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 15. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 6.5) znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 16. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 7.1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 17. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: G10.5) oblicza długość okręgu […]; G10.22) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 18. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 7.3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje […] cechy podobieństwa trójkątów.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 19. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 8.6) oblicza odległość dwóch punktów.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 20. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 8.1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 21. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: G10.7) stosuje twierdzenie Pitagorasa.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 22. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: G10.5) oblicza długość okręgu i łuku okręgu; G10.6) oblicza pole koła, pierścienia kołowego, wycinka kołowego. G11.2) oblicza pole powierzchni […] stożka […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 23. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.2) […] stosuje regułę mnożenia […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 24. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 10.1) oblicza średnią ważoną […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 25. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: G9.4) wyznacza […] medianę zestawu danych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

ZADANIA OTWARTE

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 26. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.7) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7)=0$; 3.6) korzysta z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3=-8$; 3.4) rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i uzyskanie poprawnych rozwiązań równania:
$x=-2,\ x=-\frac{1}{3},\ x=2.$

1 pkt – zapisanie dwóch równań: $27x^3+1=0$ oraz $x^2-4=0$
ALBO
– przekształcenie równania $(27x^3+1)(x^2-4)=0$ do postaci $(3x+1)(9x^2-3x+1)(x-2)(x+2)=0$,
ALBO
– rozwiązanie równania $27x^3+1=0$ w zbiorze liczb rzeczywistych: $x=-\frac{1}{3}$,
ALBO
– rozwiązanie równania $x^2-4=0$: $x=-2,\ x=2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający poda wszystkie rozwiązania równania, bez zapisywania rachunków lub uzasadnienia, to otrzymuje **2 punkty**.

2. Jeżeli zdający uzyska trzy poprawne rozwiązania równania, lecz traktuje równanie jako nierówność (podaje zbiór rozwiązań w postaci przedziału/sumy przedziałów), to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający poprawnie zapisze lewą stronę równania w postaci sumy jednomianów i doprowadzając ją do postaci iloczynu popełni błędy, ale skorzysta z własności iloczynu równego zero, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

Przykładowe pełne rozwiązanie
Iloczyn jest równy zero, jeśli przynajmniej jeden z czynników jest równy zero. Zatem:

$$27x^3 + 1 = 0 \quad \text{lub} \quad x^2 - 4 = 0$$

Równanie $27x^3 + 1 = 0$ ma jedno rozwiązanie rzeczywiste: $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$.

Równanie $x^2 - 4 = 0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste: $x = -2,\ x = 2$.

Zatem rzeczywistymi rozwiązaniami równania $(27x^3 + 1)(x^2 - 4) = 0$ są liczby:
$x = -2,\ x = -\frac{1}{3},\ x = 2$.

Zadanie 27. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.8) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych […].

Zasady oceniania
2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i uzyskanie poprawnych rozwiązań równania:
$x = -\frac{3}{4}$ oraz $x = -\frac{1}{2}$.

1 pkt – przekształcenie równania $\frac{3x+4}{x-1} = \frac{x+3}{3x}$ do równania kwadratowego, np.
$(3x + 4) \cdot 3x = (x - 1) \cdot (x + 3)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe przy przekształcaniu równania, otrzyma równanie kwadratowe, które ma dwa rozwiązania i konsekwentnie je rozwiąże do końca, to może otrzymać **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający, przekształcając równanie wymierne do równania kwadratowego, zastosuje błędną metodę - np. zapisze $(3x + 4) \cdot (x + 3) = (x - 1) \cdot 3x$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający poprawnie przekształci równanie do równania kwadratowego, uzyska poprawne wartości pierwiastków, lecz traktuje równanie jako nierówność (rysuje parabolę i podaje przedziały jako rozwiązanie), to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
Podobnie, jeżeli zdający poprawnie przekształci równanie do równania kwadratowego, uzyska poprawne wartości pierwiastków, lecz poda odpowiedź w postaci przedziału/sumy przedziałów, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie
Przekształcamy równanie:

$$\frac{3x+4}{x-1}=\frac{x+3}{3x}$$

$$(3x+4)\cdot 3x=(x-1)\cdot(x+3)$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe:

$$9x^2+12x=x^2+3x-x-3$$

$$8x^2+10x+3=0$$

Obliczamy wyróżnik Δ trójmianu kwadratowego $8x^2+10x+3$:

$$\Delta=10^2-4\cdot 8\cdot 3=100-96=4$$

Stąd:

$$x_1=\frac{-10-\sqrt{4}}{2\cdot 8}=-\frac{3}{4}$$

$$x_2=\frac{-10+\sqrt{4}}{2\cdot 8}=-\frac{1}{2}$$

Otrzymane pierwiastki są różne od liczby 0 i różne od liczby 1, więc są rozwiązaniami danego równania.

Zadanie 28. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 1.4) […] stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych; 1.5) wykorzystuje podstawowe własności potęg […].

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2}$ do postaci $7^n \cdot (1 + 7 + 7^2)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość tezy tylko dla wybranych wartości n, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Korzystamy z własności działań na potęgach i otrzymujemy:

$$7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2} = 7^n + 7^n \cdot 7 + 7^n \cdot 7^2$$

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias i otrzymujemy:

$$7^n + 7^n \cdot 7 + 7^n \cdot 7^2 = 7^n \cdot (1 + 7 + 7^2) = 7^n \cdot 57 = 19 \cdot 3 \cdot 7^n$$

Liczba $3 \cdot 7^n$ jest liczbą całkowitą dla każdej liczby całkowitej $n \geq 0$, zatem liczba $7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2}$ jest podzielna przez 19 dla każdej liczby całkowitej $n \geq 0$.

Zadanie 29. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 5.3) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $a_2 = \frac{34}{3}$.

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą r, np.

$7 + 7 + r + 7 + 2r + 7 + 3r = 54$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą a_2, np.

$3a_2 + 3(a_2 - 7) = 47$,

ALBO

– obliczenie trzeciego wyrazu ciągu: $a_3 = \frac{47}{3}$,

ALBO

– obliczenie czwartego wyrazu ciągu: $a_4 = 20$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający wypisze wszystkie cztery wyrazy rozpatrywanego ciągu arytmetycznego $(7, \frac{34}{3}, \frac{47}{3}, 20)$, to otrzymuje **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Z treści zadania wynika, że $7 + a_2 + a_3 + a_4 = 54$.

Stąd i ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy równanie:

$$7 + 7 + r + 7 + 2r + 7 + 3r = 54$$

$$28 + 6r = 54$$

$$6r = 26$$

$$r = \frac{13}{3}$$

Zatem:

$$a_2 = 7 + r = 7 + \frac{13}{3} = \frac{34}{3}$$

Sposób II

Z treści zadania wynika, że $7 + a_2 + a_3 + a_4 = 54$.

Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy:

$$a_2 = 7 + r$$

Stąd:

$$r = a_2 - 7$$

Wtedy:

$$a_3 = a_2 + r = a_2 + a_2 - 7 = 2a_2 - 7$$

$$a_4 = a_2 + 2r = a_2 + 2(a_2 - 7) = 3a_2 - 14$$

Przekształcamy równanie $7 + a_2 + a_3 + a_4 = 54$ do równania z jedną niewiadomą a_2:

$$7 + a_2 + (2a_2 - 7) + (3a_2 - 14) = 54$$

$$6a_2 - 14 = 54$$

$$6a_2 = 68$$

$$a_2 = \frac{34}{3}$$

Sposób III

Z treści zadania wynika, że $7 + a_2 + a_3 + a_4 = 54$.

Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy:

$$a_2 = a_3 - r$$

$$a_4 = a_3 + r$$

Przekształcamy równanie $7 + a_2 + a_3 + a_4 = 54$ do równania z jedną niewiadomą a_3:

$$7 + (a_3 - r) + a_3 + (a_3 + r) = 54$$

$$7 + 3a_3 = 54$$

$$3a_3 = 47$$

$$a_3 = \frac{47}{3}$$

Korzystamy z własności sąsiednich wyrazów ciągu arytmetycznego i obliczamy a_2:

$$a_2 = \frac{7 + \frac{47}{3}}{2} = \frac{68}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{34}{3}$$

Sposób IV

Z treści zadania wynika, że $7 + a_2 + a_3 + a_4 = 54$.

Ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego otrzymujemy:

$$\frac{7 + a_4}{2} \cdot 4 = 54$$

$$7 + a_4 = 27$$

$$a_4 = 20$$

Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy:

$$a_4 = a_1 + 3r$$

$$20 = 7 + 3r$$

$$r = \frac{13}{3}$$

Zatem:

$$a_2 = 7 + r = 7 + \frac{13}{3} = \frac{34}{3}$$

Zadanie 30. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: G10.21) konstruuje okrąg opisany na trójkącie […].

Zasady oceniania

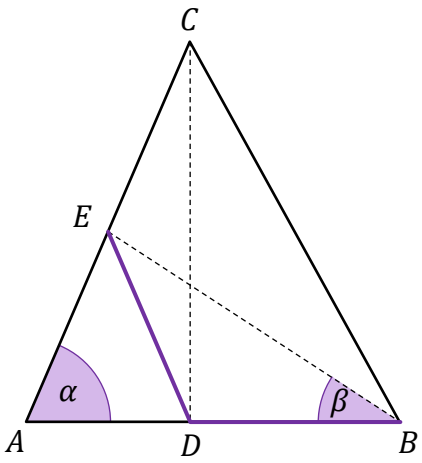
2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – zapisanie, że $|AE| = |DE|$
ALBO
– zapisanie, że $|\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle ADE|$,
ALBO
– zapisanie, że $|\sphericalangle BED| = |\sphericalangle DBE|$,
ALBO
– wyznaczenie zależności między miarami kątów ADE i ABE, np. $|\sphericalangle ADE| = 2 \cdot |\sphericalangle ABE|$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech $|\sphericalangle CAB| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle ABE| = \beta$ (zobacz rysunek). Wtedy tezę możemy zapisać w postaci $\alpha = 2\beta$.



Z równości $|DB| = |DE|$ wynika, że trójkąt DBE jest równoramienny. Stąd:

$$|\sphericalangle BED| = |\sphericalangle DBE| = \beta$$

Zatem z twierdzenia o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta wynika, że:

$$|\sphericalangle EDB| = 180° - 2\beta$$

Trójkąt ADC jest prostokątny i punkt E jest środkiem jego przeciwprostokątnej (tzn. że punkt E jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ADC), więc:

$$|AE| = |DE| = |CE|$$

Stąd wynika, że trójkąt ADE jest równoramienny, zatem:

$$|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle EAD| = \alpha$$

Kąty ADE i EDB są przyległe, więc:

$$\alpha = |\sphericalangle ADE| = 180° - |\sphericalangle EDB| = 180° - (180° - 2\beta) = 2\beta$$

Zatem $\alpha = 2\beta$. To kończy dowód.

Uwaga.
Równość $|\sphericalangle ADE| = 2\beta$ możemy też otrzymać, korzystając z twierdzenia o kącie zewnętrznym trójkąta.

Zadanie 31. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.3) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $P(A)=\frac{7}{30}$.

1 pkt – wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych *LUB* obliczenie/podanie liczby tych zdarzeń: $|\Omega|=6\cdot 5$
ALBO
– sporządzenie tabeli o 36 polach, z których 6 jest wykreślonych a pozostałe 30 odpowiada zdarzeniom elementarnym,
ALBO
– sporządzenie pełnego drzewa stochastycznego,
ALBO
– wypisanie (lub zaznaczenie w tabeli) wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i niewypisanie żadnego niewłaściwego,
ALBO
– podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A|=7$, o ile nie zostały zliczone błędne pary,
ALBO
– sporządzenie fragmentu drzewa stochastycznego, które zawiera wszystkie gałęzie sprzyjające zdarzeniu A, **oraz** zapisanie prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów doświadczenia,
ALBO
– podanie prawdopodobieństwa jednoelementowego zdarzenia (elementarnego): $\frac{1}{30}$,
ALBO
– zapisanie tylko $P(A)=\frac{7}{30}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający zapisuje tylko liczby 7 lub 30 i z rozwiązania nie wynika znaczenie tych liczb, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający rozważa losowanie ze zwracaniem, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane pary liczb (x, y), gdzie $x, y \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ i $x \neq y$.

Liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych obliczamy, korzystając z reguły mnożenia:

$$|\Omega| = 6 \cdot 5 = 30$$

Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:
$(4, 5), (4, 6), (4, 7), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 7)$, więc $|A| = 7$.

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $\frac{7}{30}$.

Sposób II

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane pary liczb (x, y), gdzie $x, y \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ i $x \neq y$.

W tabeli literą $\mathcal{A}$ zaznaczamy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A.

Druga wylosowana liczba

Pierwsza wylosowana liczba	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
2	■					
3		■				
4			■	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$
5				■		
6		$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	■	$\mathcal{A}$
7						■

Wszystkich zdarzeń elementarnych jest 30. Zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A jest 7.
Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $\frac{7}{30}$.

Zadanie 32. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 8.4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych; 8.5) wyznacza współrzędne środka odcinka; 8.6) oblicza odległość dwóch punktów.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\sqrt{445}$.

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktu S: $S = (11, 18)$.

2 pkt – obliczenie współrzędnych punktu B: $B = (16, 17)$

ALBO

– obliczenie współrzędnych środka M_{DC} boku DC: $M_{DC} = (12, 22)$,

ALBO

– obliczenie współrzędnych środka M_{AD} boku AD **oraz** obliczenie współrzędnych środka M_{KD} odcinka KD: $M_{AD} = (5, 15)$, $M_{KD} = \left(8, \frac{33}{2}\right)$,

ALBO

– obliczenie współrzędnych wektora $\overrightarrow{AD}$ (lub $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD}$):

$\overrightarrow{AD} = [2, 8]$ (lub $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} = [1, 4]$),

ALBO

– wyznaczenie równań dwóch prostych przecinających się w punkcie S, np.

$y = 4x - 26$ (równanie prostej równoległej do AD) oraz

$y = \frac{1}{2}x + \frac{25}{2}$ (równanie prostej równoległej do AB),

ALBO

– zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć jedną ze współrzędnych punktu S, np.:

$\frac{x_B + 6}{2} = x_S$ oraz $\frac{\frac{1}{2}x_B + 9 + 19}{2} = 4x_S - 26$,

$\frac{x_B + 6}{2} = x_S$ oraz $\frac{y_B + 19}{2} = y_S$ oraz $y_B = \frac{1}{2}x_B + 9$ oraz $y_S = 4x_S - 26$.

1 pkt – obliczenie współrzędnych punktu A: $A = (4, 11)$

ALBO

– obliczenie współrzędnych środka M_{KD} odcinka KD: $M_{KD} = \left(8, \frac{33}{2}\right)$,

ALBO

– wyznaczenie równania prostej przechodzącej przez punkt S, np.

$y = 4x - 26$ (równanie prostej równoległej do AD),

ALBO

– zapisanie zależności między odpowiednimi współrzędnymi punktów B, D oraz S: $\frac{x_B+6}{2}=x_S$ oraz $\frac{y_B+19}{2}=y_S$ **oraz** zapisanie współrzędnych punktu B w zależności od jednej zmiennej (x_B lub y_B), np. $B=\left(x_B,\ \frac{1}{2}x_B+9\right)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:
a) zastosowanie niepoprawnego wzoru na współczynnik kierunkowy prostej,
b) zastosowanie niepoprawnego związku między współczynnikami kierunkowymi prostych równoległych,
c) zastosowanie niepoprawnego wzoru na współrzędne środka odcinka,

i rozwiązanie zostanie doprowadzone konsekwentnie do końca, to zdający może otrzymać **2 punkt** za całe rozwiązanie. Jeżeli zdający popełni więcej niż jeden z wymienionych błędów a)–c), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

Przykładowe pełne rozwiązania
Sposób I
Punkt A jest punktem wspólnym prostych AB i AD, zatem współrzędne tego punktu są rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+9 \\ y=4x-5 \end{cases}$$

Stąd:

$$\frac{1}{2}x+9=4x-5$$
$$\frac{7}{2}x=14$$
$$x=4$$
$$y=11$$

Zatem $A=(4,11)$.

Punkt K jest środkiem odcinka AB, więc:

$$\frac{4+x_B}{2}=10 \quad \text{oraz} \quad \frac{11+y_B}{2}=14$$
$$x_B=16 \quad \text{oraz} \quad y_B=17$$

Zatem $B=(16,17)$.

Punkt $S=(x_S,y_S)$ jest środkiem odcinka BD, więc:

$$x_S=\frac{16+6}{2}=11 \quad \text{oraz} \quad \frac{17+19}{2}=18$$

Zatem $S = (11, 18)$.

Obliczamy odległość punktu S od początku układu współrzędnych:

$$\sqrt{(11-0)^2 + (18-0)^2} = \sqrt{121 + 324} = \sqrt{445}$$

Sposób II

Punkt A jest punktem wspólnym prostych AB i AD, zatem współrzędne tego punktu są rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 9 \\ y = 4x - 5 \end{cases}$$

Stąd:

$$\frac{1}{2}x + 9 = 4x - 5$$

$$\frac{7}{2}x = 14$$

$$x = 4$$

$$y = 11$$

Zatem $A = (4, 11)$.

Prosta SK jest równoległa do prostej AD, zatem współczynnik kierunkowy prostej SK jest równy 4. Wyznaczamy równanie prostej SK:

$$y = 4(x - 10) + 14$$

$$y = 4x - 26$$

Oznaczmy przez M_{AD} środek odcinka AD. Obliczmy współrzędne punktu M_{AD}:

$$M_{AD} = \left(\frac{4+6}{2}\ ,\ \frac{11+19}{2}\right) = (5, 15)$$

Prosta SM_{AD} jest równoległa do prostej AB, zatem współczynnik kierunkowy prostej SM_{AD} jest równy $\frac{1}{2}$. Wyznaczamy równanie prostej SM_{AD}:

$$y = \frac{1}{2}(x - 5) + 15$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{25}{2}$$

Punkt S jest punktem wspólnym prostych SK i SM_{AD}, zatem współrzędne tego punktu są rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} y = 4x - 26 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{25}{2} \end{cases}$$

Stąd:

$$4x - 26 = \frac{1}{2}x + \frac{25}{2}$$

$$\frac{7}{2}x = \frac{77}{2}$$

$$x = 11$$

$$y = 18$$

Zatem $S = (11, 18)$.

Obliczamy odległość punktu S od początku układu współrzędnych:

$$\sqrt{(11-0)^2 + (18-0)^2} = \sqrt{121 + 324} = \sqrt{445}$$

Sposób III

Prosta SK jest równoległa do prostej AD, zatem współczynnik kierunkowy prostej SK jest równy 4. Wyznaczamy równanie prostej SK:

$$y = 4(x - 10) + 14$$

$$y = 4x - 26$$

Punkt S leży na prostej o równaniu $y = 4x - 26$, stąd $y_S = 4x_S - 26$.

Punkt B leży na prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 9$, stąd $y_B = \frac{1}{2}x_B + 9$.

Punkt S jest środkiem odcinka BD, więc:

$$\frac{x_B + x_D}{2} = x_S \quad \text{oraz} \quad \frac{y_B + y_D}{2} = y_S$$

Zatem:

$$\frac{x_B + 6}{2} = x_S \quad \text{oraz} \quad \frac{\frac{1}{2}x_B + 9 + 19}{2} = 4x_S - 26$$

$$x_B = 2x_S - 6 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{2}x_B + 28 = 8x_S - 52$$

Stąd otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}(2x_S - 6) + 28 = 8x_S - 52$$

$$x_S - 3 + 28 = 8x_S - 52$$

$$7x_S = 77$$

$$x_S = 11$$

Wtedy:

$$y_S = 4x_S - 26 = 4 \cdot 11 - 26 = 18$$

Zatem $S = (11, 18)$.

Obliczamy odległość punktu S od początku układu współrzędnych:

$$\sqrt{(11-0)^2 + (18-0)^2} = \sqrt{121 + 324} = \sqrt{445}$$

Sposób IV

Punkt A jest punktem wspólnym prostych AB i AD, zatem współrzędne tego punktu są rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 9 \\ y = 4x - 5 \end{cases}$$

Stąd:

$$\frac{1}{2}x + 9 = 4x - 5$$

$$\frac{7}{2}x = 14$$

$$x = 4$$

$$y = 11$$

Zatem $A = (4, 11)$.

Zauważmy, że $\overrightarrow{KS} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD}$. Obliczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{KS}$ oraz $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{KS} = [x_S - 10,\ \ y_S - 14]$$

$$\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \cdot [6 - 4,\ \ 19 - 11] = \frac{1}{2} \cdot [2, 8] = [1, 4]$$

Stąd:

$$x_S - 10 = 1 \ \text{ oraz } \ y_S - 14 = 4$$

$$x_S = 11 \ \text{ oraz } \ y_S = 18$$

Zatem $S = (11, 18)$.

Obliczamy odległość punktu S od początku układu współrzędnych:

$$\sqrt{(11-0)^2 + (18-0)^2} = \sqrt{121 + 324} = \sqrt{445}$$

Sposób V

Prosta SK jest równoległa do prostej AD, zatem współczynnik kierunkowy prostej SK jest równy 4. Wyznaczamy równanie prostej SK:

$$y = 4(x - 10) + 14$$

$$y = 4x - 26$$

Oznaczmy przez M_{KD} środek odcinka KD. Obliczmy współrzędne punktu M_{KD}:

$$M_{KD} = \left(\frac{10 + 6}{2}\ ,\ \frac{14 + 19}{2}\right) = \left(8, \frac{33}{2}\right)$$

Prosta SM_{KD} jest równoległa do prostej AB, zatem współczynnik kierunkowy prostej SM_{KD} jest równy $\frac{1}{2}$. Wyznaczamy równanie prostej SM_{KD}:

$$y = \frac{1}{2}(x - 8) + \frac{33}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{25}{2}$$

Punkt S jest punktem wspólnym prostych SK i SM_{KD}, zatem współrzędne tego punktu są rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} y = 4x - 26 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{25}{2} \end{cases}$$

Stąd:

$$4x - 26 = \frac{1}{2}x + \frac{25}{2}$$

$$\frac{7}{2}x = \frac{77}{2}$$

$$x = 11$$

$$y = 18$$

Zatem $S = (11, 18)$.

Obliczamy odległość punktu S od początku układu współrzędnych:

$$\sqrt{(11 - 0)^2 + (18 - 0)^2} = \sqrt{121 + 324} = \sqrt{445}$$

Zadanie 33. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 9.6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawne wyniki: $V = 18\pi\sqrt{3}$,
$P_c = 18\pi + 12\pi\sqrt{3}$.

3 pkt – obliczenie objętości walca: $V = 18\pi\sqrt{3}$
ALBO
– obliczenie pola powierzchni całkowitej walca: $P_c = 18\pi + 12\pi\sqrt{3}$.

2 pkt – zapisanie promienia podstawy walca (lub średnicy podstawy walca): $r = 3$
(lub $2r = 6$) **oraz** zapisanie wysokości walca: $H = 2\sqrt{3}$
ALBO
– obliczenie kwadratu promienia podstawy walca (lub kwadratu średnicy podstawy walca): $r^2 = 9$ (lub $(2r)^2 = 36$) **oraz** zapisanie wysokości walca: $H = 2\sqrt{3}$.

1 pkt – zapisanie promienia podstawy walca (lub średnicy podstawy walca): $r = 3$
(lub $2r = 6$)
ALBO
– zapisanie wysokości walca: $H = 2\sqrt{3}$,
ALBO
– zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć r oraz H, np.:
$H = x$ oraz $2r = x\sqrt{3}$ oraz $2x = 4\sqrt{3}$,
$\frac{H}{4\sqrt{3}} = \sin 30°$ oraz $\frac{2r}{4\sqrt{3}} = \cos 30°$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

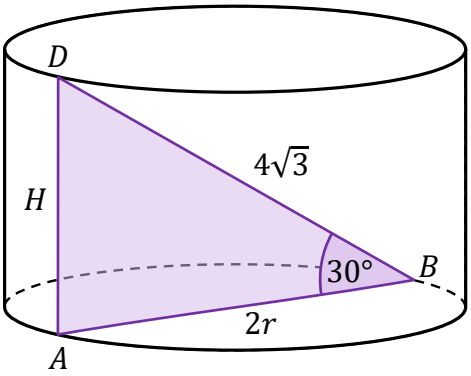
Uwaga:
Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:
a) zastosowanie niepoprawnej definicji jednej funkcji trygonometrycznej,
b) błędne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa,
c) zastosowanie niepoprawnej tożsamości $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$,
d) błędne zastosowanie własności trójkąta o kątach $30°$, $60°$, $90°$ (tzn. zapisanie, że średnica podstawy walca jest równa $2\sqrt{3}$ i wysokość walca jest równa 6),
i rozwiązanie zostanie doprowadzone konsekwentnie do końca, to zdający może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za konsekwentne obliczenie objętości i pola powierzchni całkowitej walca).

Jeżeli zdający popełni więcej niż jeden z wymienionych błędów a)–d), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku:
r – promień podstawy walca,
H – wysokość walca.

Zauważamy, że kąt DAB jest prosty oraz $r > 0$ i $H > 0$.



W trójkącie prostokątnym ABD mamy:

$$\sin 30^\circ = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{H}{4\sqrt{3}}$$

Zatem:

$$H = 4\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$$

Ponadto:

$$\cos 30^\circ = \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{2r}{4\sqrt{3}} = \frac{r}{2\sqrt{3}}$$

Stąd:

$$r = 2\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

Obliczamy objętość V walca:

$$V = \pi r^2 H = \pi \cdot 3^2 \cdot 2\sqrt{3} = 18\pi\sqrt{3}$$

Obliczamy pole powierzchni całkowitej P_c walca:

$$P_c = 2\pi r^2 + 2\pi r H = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} = 18\pi + 12\pi\sqrt{3}$$

Zadanie 34. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 4.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $a = -4,\ b = 24,\ c = 64$.

4 pkt – spełnienie jednego z kryteriów za 3 punkty **oraz** obliczenie wartości jednego ze współczynników $a,\ b$ lub c: $a = -4$ lub $b = 24$, lub $c = 64$.

3 pkt – zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x) = a(x+2)(x-8)$ **oraz** obliczenie współrzędnych wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji f: $W = (3, 100)$
ALBO
– zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x) = a(x-3)^2 + 100$,
ALBO
– zapisanie układu trzech niezależnych równań z trzema niewiadomymi $a,\ b,\ c$ prowadzącego do obliczenia wartości współczynników $a,\ b$ oraz c, np.:
$a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 0$ oraz
$a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c = 0$ oraz
$\frac{-(b^2-4ac)}{4a} = 100$
lub
$a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 0$ oraz
$a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c = 0$ oraz
$a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 100$

2 pkt – zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x) = a(x+2)(x-8)$
ALBO
– obliczenie współrzędnych wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji f: $W = (3, 100)$,
ALBO
– zapisanie, że liczba $q = 100$ jest drugą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f **oraz** zapisanie jednego z równań:
$a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 0$ lub $a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c = 0$.

1 pkt – zapisanie, że liczby $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 8$ są miejscami zerowymi funkcji f
ALBO
– zapisanie, że liczba $q = 100$ jest drugą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f,
ALBO

– zapisanie, że liczba $p = 3$ jest pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f,
ALBO
– zapisanie jednego z równań:
$a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 0$ lub $a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający poprawnie obliczy/poda obie współrzędne wierzchołka paraboli, ale zapisze błędne równanie $0 = a(-2+3)^2 + 100$ lub $0 = a(8+3)^2 + 100$, a następnie konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający poprawnie zidentyfikuje miejsca zerowe funkcji f, ale zapisze błędne równanie $100 = a(3-2)(3+8)$ lub $100 = a(3-2)(3-8)$, lub $100 = a(3+2)(3+8)$, a następnie konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania
Sposób I
Największa wartość funkcji f jest równa 100, zatem liczba $q = 100$ jest drugą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f.
Ponieważ zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie jest przedział $(-2, 8)$, więc liczby $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 8$ są miejscami zerowymi funkcji f.

Obliczamy pierwszą współrzędną p wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f:

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2+8}{2} = 3$$

Korzystamy ze wzoru na postać kanoniczną funkcji kwadratowej i zapisujemy:

$$f(x) = a(x-3)^2 + 100, \text{ gdzie } a \neq 0.$$

Liczba (-2) jest miejscem zerowym funkcji f, więc:

$$f(-2) = 0$$

$$a(-2-3)^2 + 100 = 0$$

$$25a = -100$$

$$a = -4$$

Zapisujemy wzór funkcji f w postaci kanonicznej:

$$f(x) = -4(x-3)^2 + 100$$

Przekształcamy wzór funkcji f do postaci ogólnej:

$$f(x) = -4(x-3)^2 + 100 = -4(x^2 - 6x + 9) + 100 = -4x^2 + 24x + 64$$

Wartości współczynników a, b oraz c we wzorze funkcji f są więc równe:
$a = -4,\ b = 24,\ c = 64.$

Sposób II

Ponieważ zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie jest przedział $(-2, 8)$, więc liczby $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 8$ są miejscami zerowymi funkcji f.

Korzystamy ze wzoru na postać iloczynową funkcji kwadratowej i zapisujemy:

$$f(x) = a(x+2)(x-8), \quad \text{gdzie } a \neq 0.$$

Obliczamy pierwszą współrzędną p wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f:

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2 + 8}{2} = 3$$

Największa wartość funkcji f jest równa 100, zatem liczba $q = 100$ jest drugą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f.

Punkt $W = (3, 100)$ jest wierzchołkiem wykresu funkcji f, więc:

$$f(3) = 100$$

$$a(3+2)(3-8) = 100$$

$$-25a = 100$$

$$a = -4$$

Zapisujemy wzór funkcji f w postaci iloczynowej:

$$f(x) = -4(x+2)(x-8)$$

Przekształcamy wzór funkcji f do postaci ogólnej:

$$f(x) = -4(x+2)(x-8) = -4(x^2 - 6x - 16) = -4x^2 + 24x + 64$$

Wartości współczynników a, b oraz c we wzorze funkcji f są więc równe:
$a = -4,\ b = 24,\ c = 64.$

Sposób III

Ponieważ zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie jest przedział $(-2, 8)$, więc liczby $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 8$ są miejscami zerowymi funkcji f. Zatem:

$$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(8) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 0 \\ a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ 64a + 8b + c = 0 \end{cases}$$

Odejmując równania stronami, otrzymujemy:

$$(4a - 2b + c) - (64a + 8b + c) = 0$$

$$-60a - 10b = 0$$

$$b = -6a$$

Ponieważ największa wartość funkcji f jest równa 100, zatem liczba $q = 100$ jest drugą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f. Stąd:

$$\frac{-\Delta}{4a} = 100$$

$$\frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = 100$$

Podstawiamy do ostatniego równania w miejsce b wyrażenie $(-6a)$ i otrzymujemy:

$$\frac{-((-6a)^2 - 4ac)}{4a} = 100$$

$$\frac{-36a^2 + 4ac}{4a} = 100$$

$$\frac{4a \cdot (-9a + c)}{4a} = 100$$

$$-9a + c = 100$$

$$c = 9a + 100$$

Z uzyskanych równań $4a - 2b + c = 0$, $b = -6a$ oraz $c = 9a + 100$ obliczamy wartości współczynników a, b oraz c:

$$4a - 2b + c = 0$$

$$4a - 2 \cdot (-6a) + (9a + 100) = 0$$

$$4a + 12a + 9a + 100 = 0$$

$$25a = -100$$

$$a = -4$$

$$b = -6a = -6 \cdot (-4) = 24$$

$$c = 9a + 100 = 9 \cdot (-4) + 100 = 64$$

Sposób IV

Ponieważ zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie jest przedział $(-2, 8)$, więc liczby $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 8$ są miejscami zerowymi funkcji f. Zatem $f(-2) = 0$ oraz $f(8) = 0$.

Obliczamy pierwszą współrzędną p wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f:

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2 + 8}{2} = 3$$

Największa wartość funkcji f jest równa 100, więc liczba $q = 100$ jest drugą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f. Zatem $f(3) = 100$.

Z uzyskanych równości $f(-2) = 0$, $f(8) = 0$ oraz $f(3) = 100$ obliczamy wartości współczynników a, b oraz c:

$$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(8) = 0 \\ f(3) = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 0 \\ a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c = 0 \\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ 64a + 8b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ 64a + 8b + c = 0 \\ c = 100 - 9a - 3b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a - 2b + 100 - 9a - 3b = 0 \\ 64a + 8b + 100 - 9a - 3b = 0 \\ c = 100 - 9a - 3b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5a - 5b + 100 = 0 \quad /:(-5) \\ 55a + 5b + 100 = 0 \quad /:5 \\ c = 100 - 9a - 3b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b - 20 = 0 \\ 11a + b + 20 = 0 \\ c = 100 - 9a - 3b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b - 20 = 0 \\ b = -11a - 20 \\ c = 100 - 9a - 3b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 11a - 20 - 20 = 0 \\ b = -11a - 20 \\ c = 100 - 9a - 3 \cdot (-11a - 20) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10a = 40 \\ b = -11a - 20 \\ c = 160 + 24a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -4 \\ b = -11a - 20 \\ c = 160 + 24a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -4 \\ b = -11 \cdot (-4) - 20 = 24 \\ c = 160 + 24 \cdot (-4) = 64 \end{cases}$$

Ocena prac osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Obowiązują **Zasady oceniania** stosowane przy sprawdzaniu prac zdających bez stwierdzonej dyskalkulii z dodatkowym uwzględnieniem:

a) **ogólnych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią (punkty 1.–12.);

b) dodatkowych **szczegółowych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią – egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, termin dodatkowy 2026.

I. **Ogólne zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

1. Nie należy traktować jako błędy merytoryczne pomyłek wynikających z:
   - błędnego przepisania
   - przestawienia cyfr
   - zapisania innej cyfry, ale o podobnym wyglądzie
   - przestawienia położenia przecinka
   - przestawienia położenia znaku liczby.

2. W przypadku błędów wynikających ze zmiany znaku liczby należy w każdym zadaniu oddzielnie przeanalizować, czy zdający opanował inne umiejętności, poza umiejętnościami rachunkowymi, oceniane w zadaniu. W przypadku opanowania badanych umiejętności zdający powinien otrzymać przynajmniej 1 punkt.

3. We wszystkich zadaniach otwartych, w których wskazano poprawną metodę rozwiązania, części lub całości zadania, zdającemu należy przyznać przynajmniej 1 punkt, zgodnie z kryteriami do poszczególnych zadań.

4. Jeśli zdający przedstawia nieprecyzyjne zapisy, na przykład pomija nawiasy lub zapisuje nawiasy w niewłaściwych miejscach, ale przeprowadza poprawne rozumowanie lub stosuje właściwą strategię, to może otrzymać przynajmniej 1 punkt za rozwiązanie zadania.

5. W przypadku zadania wymagającego wyznaczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi poprawną metodę wyznaczania pierwiastków trójmianu kwadratowego, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.

6. W przypadku zadania wymagającego rozwiązania nierówności kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli stosuje poprawny algorytm rozwiązywania nierówności kwadratowej, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.

7. W przypadku zadania wymagającego stosowania własności funkcji kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt za wykorzystanie konkretnych własności funkcji kwadratowej, istotnych przy poszukiwaniu rozwiązania.

8. W przypadku zadania wymagającego zastosowania własności ciągów arytmetycznych lub geometrycznych zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi wykorzystanie takiej własności ciągu, która umożliwia znalezienie rozwiązania zadania.

9. W przypadku zadania wymagającego analizowania figur geometrycznych na płaszczyźnie kartezjańskiej zdający może otrzymać punkty, jeżeli przy poszukiwaniu rozwiązania przedstawi poprawne rozumowanie, wykorzystujące własności figur geometrycznych, lub zapisze zależności pozwalające rozwiązać zadanie.
10. W przypadku zadania z rachunku prawdopodobieństwa zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeśli przy wyznaczaniu liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających rozważanemu zdarzeniu przyjmuje określoną regularność lub podaje prawidłową metodę wyznaczenia tej liczby zdarzeń elementarnych.
11. W przypadku zadania z geometrii zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeżeli podaje poprawną metodę wyznaczenia długości odcinka potrzebnej do znalezienia rozwiązania.
12. W przypadku zadania wymagającego przeprowadzenia dowodu (z zakresu algebry lub geometrii), jeśli w przedstawionym rozwiązaniu zdający powoła się na własność, która wyznacza istotny postęp, prowadzący do przeprowadzenia dowodu, to może otrzymać 1 punkt.

II. Dodatkowe **szczegółowe zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Zadanie 26.

1 pkt – zapisanie, że liczba 2 jest rozwiązaniem równania $x^2 - 4 = 0$.

Zadanie 27.

Uwaga:

Jeżeli zdający popełnia błąd przy przekształceniu równania $\frac{3x+4}{x-1} = \frac{x+3}{3x}$ do postaci równania kwadratowego, lecz dalej stosuje poprawną metodę rozwiązania otrzymanego równania kwadratowego i konsekwentnie oblicza pierwiastki tego równania, to może otrzymać **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Zadanie 28.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2}$ do postaci $7^n + 7^n \cdot 7 + 7^n \cdot 7^2$.

Zadanie 29.

1 pkt – zapisanie związku $a_2 = 7 + r$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą a_4, np. $\frac{7+a_4}{2} \cdot 4 = 54$.

Zadanie 30.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 31.

1 pkt – zapisanie jedynie liczby 30 (należy traktować to jako wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych).

Uwagi:

1. W ocenie rozwiązania tego zadania (dla zdających z dyskalkulią) nie stosuje się uwagi 1. ze standardowych zasad oceniania.
2. Jeżeli zdający poprawnie wypisze/zaznaczy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, lecz popełni błąd w ich zliczeniu (np. $|A| = 8$) i konsekwentnie zapisze wynik (np. $\frac{8}{30}$), to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 32.

1 pkt – zapisanie równania, w którym niewiadomą jest pierwsza współrzędna wierzchołka A, np. $\frac{1}{2}x + 9 = 4x - 5$.

Zadanie 33.

1 pkt – zastosowanie definicji funkcji trygonometrycznej lub związków miarowych w trójkącie o kątach $30°, 60°, 90°$ i zapisanie równania z jedną niewiadomą (wysokością walca lub promieniem podstawy walca), np.: $\frac{H}{4\sqrt{3}} = \sin 30°$, $\frac{2r}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zadanie 34.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.