CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

| | |
|---|---|
| *Rodzaj dokumentu:* | **Zasady oceniania rozwiązań zadań** |
| *Egzamin:* | **Egzamin maturalny**<br>**Arkusz pokazowy** |
| *Przedmiot:* | **Matematyka** |
| *Poziom:* | **Poziom podstawowy** |
| *Formy arkusza:* | MMAP-P0-100, MMAP-P0-200,<br>MMAP-P0-300, MMAP-P0-400,<br>MMAP-P0-660, MMAP-P0-700,<br>MMAP-P0-Q00 |
| *Data publikacji dokumentu:* | 4 marca 2022 r. |

**Uwaga**: *Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania*.

## Zadanie 1. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024[1] | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymagania szczegółowe** |
| I. Sprawność rachunkowa.<br>Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych. | Zdający:<br>I.1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;<br>I.4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

B

## Zadanie 2. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| I. Sprawność rachunkowa.<br>Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych. | Zdający:<br>I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi. |

[1] Komunikat o wymaganiach egzaminacyjnych obowiązujących w roku 2023 i 2024, https://www.gov.pl/web/edukacja-i-nauka/wymagania-egzaminacyjne-obowiazujace-na-egzaminie-maturalnym-w-roku-2023-i-2024

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
B

**Zadanie 3. (0-1)**

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Zdający:<br>XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania […]. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
C

**Zadanie 4. (0–1)**

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający:<br>II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $a^2-b^2$. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
C

## Zadanie 5. (0–2)

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający:<br>IV.1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych.<br>VIII.4) korzysta z własności kątów […]. |

**Zasady oceniania**

2 pkt – wybranie dwóch poprawnych odpowiedzi: B i E.
1 pkt – wybranie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których jedna jest poprawna: B albo E.
0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

BE

## Zadanie 6. (0–1)

| Wymagania ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| I. Sprawność rachunkowa.<br>Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.<br>III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający:<br>V.2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

B

## Zadanie 7. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający:<br>III.6) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
A

## Zadanie 8. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający:<br>I.6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;<br>I.7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: $\|x+4\| = 5$, $\|x-2\| < 3$, $\|x+3\| \geq 4$. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
A

## Zadanie 9. (0–2)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu. | Zdający:<br>I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia […]. |

**Zasady oceniania**

2 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu.

1 pkt – zapisanie liczby $n$ w postaci $n = 2k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ , i przekształcenie wyrażenia $(2k + 1)^2 + 2023$ do postaci sumy o składnikach podzielnych przez $8$ (lub do postaci iloczynu liczby $4$ i liczby parzystej), np. $4k(k + 1) + 2024$, $4[k(k + 1) + 506]$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Niech $n$ będzie liczbą całkowitą nieparzystą. Wtedy $n = 2k + 1$ przy pewnym $k \in \mathbb{Z}$, więc $n^2 + 2023 = (2k + 1)^2 + 2023 = 4k^2 + 4k + 1 + 2023 = 4k(k + 1) + 2024$.

Jeżeli $k$ jest liczbą parzystą, to liczba $4k(k + 1)$ jest podzielna przez $8$ jako iloczyn liczby $4$, liczby parzystej $k$ i liczby całkowitej $k + 1$.

Jeżeli $k$ jest liczbą nieparzystą, to liczba $4k(k + 1)$ jest podzielna przez $8$ jako iloczyn liczby $4$, liczby parzystej $k + 1$ i liczby całkowitej $k$.

Liczba $2024$ jest podzielna przez $8$, gdyż $2024 = 8 \cdot 253$.

Zatem liczba $4k(k + 1) + 2024$ jest podzielna przez $8$ jako suma liczb podzielnych przez $8$. To kończy dowód.

## Zadanie 10.1. (0–1)

| Wymagania ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.<br>1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.<br>III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający:<br>V.12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$ […]. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

D

## Zadanie 10.2. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.<br>1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. | Zdający:<br>V.4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – rozwiązanie poprawne.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

$(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

**Zadanie 10.3. (0–3)**

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający:<br>V.8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);<br>V.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie. |

**Zasady oceniania**

3 pkt – poprawne wyznaczenie wzoru funkcji $f$ w postaci kanonicznej i zapisanie wyniku: $f(x) = -2(x-1)^2 + 8$.

2 pkt – poprawne odczytanie z wykresu współrzędnych punktu przecięcia paraboli z jedną z osi układu i poprawne podstawienie do równania $f(x) = a(x-1)^2 + 8$: np. $0 = a(-1-1)^2 + 8$.

1 pkt – poprawne odczytanie z wykresu współrzędnych wierzchołka paraboli i zapisanie $f(x) = a(x-1)^2 + 8$.

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Korzystamy ze wzoru na postać kanoniczną funkcji kwadratowej i zapisujemy $f(x) = a(x-p)^2 + q$.

Odczytujemy z wykresu funkcji $f$ współrzędne wierzchołka paraboli: $p = 1$ oraz $q = 8$.

Zatem $f(x) = a(x-1)^2 + 8$.

Z wykresu odczytujemy jedno z miejsc zerowych funkcji $f$, np. $x = -1$. Ponieważ $f(-1) = 0$, więc

$$0 = a(-1-1)^2 + 8$$

$$a = -2$$

Wzór funkcji $f$ w postaci kanonicznej: $f(x) = -2(x-1)^2 + 8$.

## Zadanie 11. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.<br>1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. | Zdający:<br>V.5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
B

## Zadanie 12. (0–1)

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.<br>1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.<br>III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Zdający:<br>V.6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach;<br>V.11) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
B

## Zadanie 13.1 (0–1)

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.<br>1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.<br>III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Zdający:<br>V.3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;<br>V.13) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

A

## Zadanie 13.2 (0–3)

| Wymagania ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.<br>1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.<br>III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Zdający:<br>VI.5) stosuje wzór na $n$–ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. |

**Zasady oceniania**

3 pkt – poprawna metoda obliczenia masy leku tuż przed przyjęciem jedenastej dawki i poprawny wynik: $99{,}9$ mg.

2 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na sumę początkowych kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego i zapisanie sumy w postaci $100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}}$.

1 pkt – poprawne wyznaczenie mas leku, jakie pozostały w organizmie z poszczególnych dawek na moment przed przyjęciem jedenastej dawki:

$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ mg, $100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{9}$ mg, $100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8}$ mg, …, $100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1}$ mg.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Pacjent przyjmuje jedenastą dawkę leku po $40$ dniach, licząc od momentu przyjęcia pierwszej dawki.

Tuż przed przyjęciem jedenastej dawki leku w organizmie pacjenta znajduje się:

$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ mg leku z pierwszej dawki,

$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{9}$ mg leku z drugiej dawki,

$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8}$ mg leku z trzeciej dawki,

$\vdots$

$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2}$ mg leku z dziewiątej dawki,

$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1}$ mg leku z dziesiątej dawki.

Łącznie w organizmie pacjenta znajduje się

$$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1} + 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2} + \ldots + 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{9} + 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$= 100\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) \approx 99{,}9 \text{ mg leku.}$$

## Zadanie 14. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| I. Sprawność rachunkowa.<br>Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych. | Zdający:<br>I.8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych z kapitalizacją roczną i zysków z lokat. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

D

## Zadanie 15. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia. | Zdający:<br>VI.1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;<br>VI.3) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

PF

## Zadanie 16. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia. | Zdający:<br>VII.3) stosuje twierdzenie cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

PP

## Zadanie 17. (0-1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający:<br>IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

A

**Zadanie 18. (0–1)**

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający:<br>VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – poprawna metoda rozwiązania oraz zapisanie wyniku: $|OD| = 6$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Ponieważ $|\sphericalangle OAB| = |\sphericalangle OCD|$ (z założenia), $|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle COD|$ (jako miary kątów wierzchołkowych) oraz $|\sphericalangle ABO| = |\sphericalangle CDO|$ (z twierdzenia o sumie miar kątów w trójkącie), więc trójkąty $ABO$ i $ODC$ są podobne na mocy cechy *kkk* podobieństwa trójkątów.

Zatem

$$\frac{|CO|}{|AO|} = \frac{|OD|}{|OB|}$$

$$\frac{10}{5} = \frac{|OD|}{3}$$

$$|OD| = 6$$

Długość boku $OD$ trójkąta $ODC$ jest równa $6$.

**Zadanie 19. (0–2)**

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający:<br>IX.2) posługuje się równaniem prostej na płaszczyźnie w postaci kierunkowej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu). |

**Zasady oceniania**

2 pkt – poprawne dokończenia dwóch zdań.
1 pkt – poprawne dokończenie jednego zdania.
0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

1. B 2. E

**Zadanie 20. (0–1)**

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający:<br>IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

B

**Zadanie 21. (0–1)**

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający:<br>VII.4) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych […].<br>VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
A

## Zadanie 22. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający:<br>VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ . |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
A

## Zadanie 23. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia. | Zdający:<br>VIII.9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
A2

## Zadanie 24. (0–1)

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych;<br>3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu. | Zdający:<br>VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;<br>VIII.7) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

D

## Zadanie 25. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający:<br>VIII.11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

D

## Zadanie 26. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający:<br>X.5) wykorzystuje zależność między objętościami graniastosłupów oraz ostrosłupów podobnych. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

C

## Zadanie 27. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający:<br>X.2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną;<br>X.3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi), oblicza miary tych kątów. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

A

**Zadanie 28. (0–3)**

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności. | Zdający:<br>XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania […].<br>XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym. |

**Zasady oceniania**

3 pkt – prawidłowa metoda obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia $A$ i podanie poprawnego wyniku: $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{1}{900}$.

2 pkt – obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych i liczby wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu $A$: $|\Omega|=9000$, $|A|=10$.

1 pkt – obliczenie liczby $|\Omega|$ wszystkich zdarzeń elementarnych:
$|\Omega|=9999-999=9\,000$
*LUB*
– wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A$:
$1011, 1101, 1110, 1002, 1020, 1200, 2001, 2010, 2100, 3000$
*LUB*
– obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A$:
$|A|=10$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Ponieważ losy są ponumerowane kolejno od $1000$ do $9999$, więc początkowa liczba wszystkich losów na tej loterii jest równa $9999-999=9000$. Zatem $|\Omega|=9000$.
Niech $A$ oznacza zdarzenie polegające na tym, że pierwszy wylosowany z pojemnika los był wygrywający. Wtedy
$A=\{1011, 1101, 1110, 1002, 1020, 1200, 2001, 2010, 2100, 3000\}$, więc $|A|=10$.
Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia $A$:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{10}{9000}=\frac{1}{900}$$

**Zadanie 29. (0–4)**

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>4. Stosowanie i tworzenie strategii podczas rozwiązywania zadań, również w sytuacjach nietypowych. | Zdający:<br>XIII. rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową. |

**Zasady oceniania**

4 pkt – poprawna metoda obliczenia długości obu boków równoległoboku o największym polu oraz podanie prawidłowych wyników: $a = 50, b = 50$ oraz $P(50) = 1250$.

3 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole $P$ równoległoboku w zależności od jednej zmiennej, wyznaczenie dziedziny $D$ tej funkcji oraz prawidłowe obliczenie argumentu $a_{opt}$, dla którego funkcja pola osiąga wartość największą:
$P(a) = a \cdot (100 - a) \cdot \frac{1}{2}$, $D = (0, 100)$, $a_{opt} = 50$.

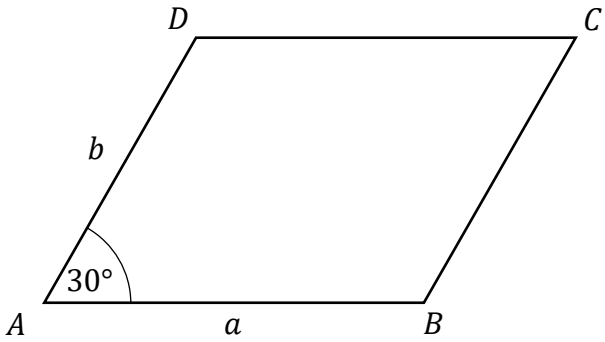
2 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole równoległoboku w zależności od jednej zmiennej:
$P(a) = a \cdot (100 - a) \cdot \frac{1}{2}$.

1 pkt – zapisanie wzoru na pole równoległoboku: $P = a \cdot b \cdot \sin 30°$
*LUB*
– zapisanie związku między długościami boków równoległoboku: $2a + 2b = 200$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Oznaczmy przez $a$ oraz $b$ długości boków równoległoboku o obwodzie równym $200$ i kącie ostrym o mierze $30°$ (zobacz rysunek).




Ponieważ $2a + 2b = 200$ oraz $a > 0$ i $b > 0$, więc $b = 100 - a$ i $a \in (0, 100)$.
Wyznaczamy pole $P$ równoległoboku jako funkcję jednej zmiennej $a$:

$$P = a \cdot b \cdot \sin 30°$$

$$P(a) = a \cdot (100 - a) \cdot \frac{1}{2}$$

$$P(a) = -\frac{1}{2}a^2 + 50a$$

dla $a \in (0, 100)$.

Wykresem funkcji $P(a)$ jest fragment paraboli skierowanej ramionami do dołu. Z własności funkcji kwadratowej wynika, że funkcja $P$ może osiągnąć wartość największą w punkcie odpowiadającym wierzchołkowi paraboli, tj. dla argumentu $a = -\frac{50}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 50$. Ponieważ $50 \in (0, 100)$, więc funkcja $P$ osiąga wartość największą dla argumentu $a = 50$. Wtedy $b = 100 - a = 100 - 50 = 50$ oraz $P(50) = 50 \cdot (100 - 50) \cdot \frac{1}{2} = 1250$.
Z rozważanych równoległoboków największe pole – równe $1250$ – ma ten, który jest rombem o boku długości $50$.

## Zadanie 30.1. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.<br>1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. | Zdający:<br>XII.2) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
PP

## Zadanie 30.2. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.<br>1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. | Zdający:<br>XII.2) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
B