CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY

W ROKU SZKOLNYM 2019/2020

MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

FORMUŁA OD 2015

(„NOWA MATURA”)

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

ARKUSZ MMA-R1A1P-203

CZERWIEC 2020

Egzaminatorze!

- Oceniaj prace zdających uczciwie i z zaangażowaniem.
- **Stosuj przyjęte zasady oceniania w sposób obiektywny**. Pamiętaj, że każda merytorycznie poprawna odpowiedź, spełniająca warunki określone w poleceniu, musi zostać pozytywnie oceniona, nawet jeżeli nie została przewidziana w przykładowych odpowiedziach w zasadach oceniania.
- Konsultuj niejednoznaczne rozwiązania zadań z innymi egzaminatorami lub przewodniczącym zespołu egzaminatorów. W przypadku niemożności osiągnięcia wspólnego stanowiska, rozstrzygajcie na korzyść zdającego.
- Przyznając punkty, nie kieruj się emocjami.
- Informuj przewodniczącego o wszystkich nieprawidłowościach zaistniałych w trakcie oceniania, w tym podejrzeń o niesamodzielność w pisaniu pracy.

Numer zadania	1	2	3	4
Odpowiedź	**D**	**C**	**C**	**B**

Klucz punktowania zadań kodowanych

Zadanie 5. (0–2)

Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, jest równa 2, a suma kwadratów wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 3. Oblicz iloraz ciągu (a_n).

W kratki poniżej wpisz kolejno – od lewej do prawej – cyfrę jedności, części dziesiętnych i setnych otrzymanego wyniku.

Przykładowe rozwiązanie

Suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa 2, zatem $\frac{a_1}{1-q} = 2$.

Suma kwadratów wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa 3, a zatem $\frac{a_1^2}{1-q^2} = 3$.

Stąd wynika, że $7q^2 - 8q + 1 = 0$.

Rozwiązaniami równania są $q = \frac{1}{7}$ lub $q = 1$.

Rozwiązanie $q = 1$ jest sprzeczne, ponieważ nie spełnia warunku zbieżności nieskończonego ciągu geometrycznego $|q| < 1$. Zatem $q = \frac{1}{7} = 0,(142857)$.

Zad 5.

0	1	4

Zadanie 6. (0–3)

Pierwszy wyraz ciągu (a_n), określonego dla $n \geq 1$, jest równy 2. Wszystkie wyrazy tego ciągu spełniają warunek $a_n = 3 \cdot a_{n+1} + n^2$. Oblicz sumę $a_1 + a_2 + a_3$.

Rozwiązanie

Wyznaczamy kolejno wyrazy;

dla $n = 1$ otrzymujemy: $a_1 = 3 \cdot a_2 + 1$, czyli $a_2 = \frac{1}{3}$,

dla $n = 2$ otrzymujemy: $a_2 = 3 \cdot a_3 + 4$, czyli $a_3 = -\frac{11}{9}$.

Stąd $a_1 + a_2 + a_3 = 2 + \frac{1}{3} - \frac{11}{9} = \frac{10}{9}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.

gdy obliczy drugi wyraz ciągu (a_n): $a_2 = \frac{1}{3}$

Zdający otrzymuje ..... 2 p.

gdy obliczy trzeci wyraz ciągu (a_n): $a_3 = -\frac{11}{9}$

Zdający otrzymuje ..... 3 p.

gdy obliczy sumę $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{10}{9}$.

Zadanie 7. (0–3)

Dany jest czworokąt wypukły, którego kolejnymi wierzchołkami są punkty *A*, *B*, *C* i *D*. Wykaż, że jeżeli $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB|$, to $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BDC|$.

Przykładowe sposoby rozwiązania zadania

I sposób

Niech $a = |AB|$, $\alpha = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$, r_1 – promień okręgu opisanego na trójkącie *ACB*, r_2 – promień okręgu opisanego na trójkącie *ADB*.

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta *ACB* i dla trójkąta *ADC* wynika, że

$$\frac{|AB|}{\sin \sphericalangle ACB} = 2r_1 \text{ oraz } \frac{|AB|}{\sin \sphericalangle ADB} = 2r_2,$$

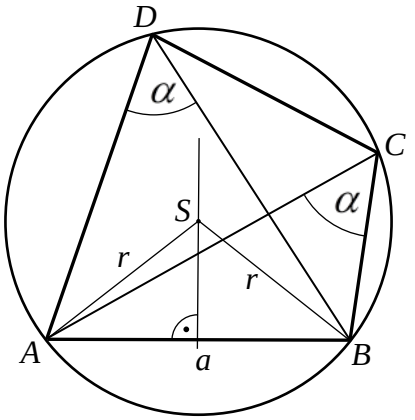
czyli

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2r_1 \text{ oraz } \frac{a}{\sin \alpha} = 2r_2.$$

Stąd wynika, że $r_1 = r_2$.

Ponieważ odcinek *AB* jest wspólnym bokiem trójkątów *ACB* i *ADB*, więc środki okręgów opisanych na tych trójkątach leżą na symetralnej tego boku. Z faktu, że czworokąt *ABCD* jest wypukły, wynika natomiast, że punkty *C* i *D* leżą po tej samej stronie prostej *AB*.

Stąd i z równości $r_1 = r_2$ wynika, że środki obu tych okręgów pokrywają się, co oznacza, że okrąg opisany na trójkącie *ACB* jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie *ADB*.



Jest to więc okrąg opisany na czworokącie *ABCD*. Kąty *BAC* i *BDC* są równe, gdyż są to kąty wpisane w ten okrąg, oparte na tym samym łuku *BC*. To kończy dowód.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....1 pkt

Zdający wykaże, że promienie okręgów opisanych na trójkątach *ACB* i *ADB* są równe.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....2 pkt

Zdający uzasadni, że na czworokącie *ABCD* można opisać okrąg.

Uwaga

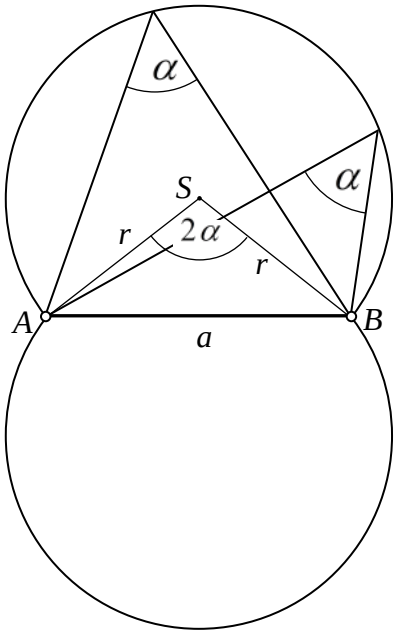
Jeżeli zdający z faktu, że promienie okręgów opisanych na trójkątach *ACB* i *ADB* są równe oraz z faktu, że środki tych okręgów leżą na tej samej prostej, wywnioskuje, że okręgi opisane na trójkątach *ACB* i *ADB* pokrywają się, to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie pełne .....3 pkt

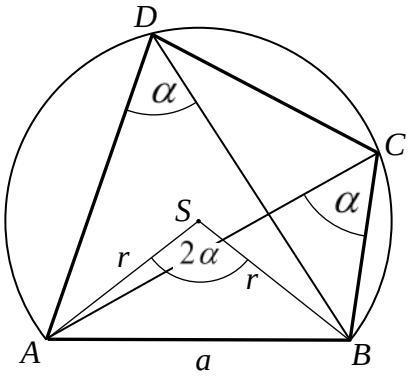
Zdający uzasadni, że kąty *BAC* i *BDC* są równe.

II sposób

Miejscem geometrycznym punktów, z których odcinek *AB* widać pod tym samym kątem $\alpha = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$, jest suma łuków (bez końców) $\overset{\frown}{AB}$ okręgów, których ten odcinek jest wspólną cięciwą, przy czym łuk leżący po jednej stronie prostej *AB* jest symetryczny do łuku leżącego po drugiej stronie tej prostej.



Wierzchołki *C* i *D* czworokąta *ABCD* leżą na jednym z tych łuków, gdyż czworokąt ten jest wypukły.
Oznacza to, że na czworokącie *ABCD* można opisać okrąg.



Kąty *BAC* i *BDC* są równe, gdyż są to kąty wpisane w ten okrąg, oparte na tym samym łuku *BC*. To kończy dowód.

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....2 pkt

Zdający uzasadni, że na czworokącie *ABCD* można opisać okrąg, odwołując się do miejsca geometrycznego punktów, z których odcinek *AB* widać pod tym samym kątem $\alpha = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$.

Uwaga
Jeżeli zdający z faktu, że promienie okręgów opisanych na trójkątach *ACB* i *ADB* są równe oraz z faktu, że środki tych okręgów leżą na tej samej prostej, wywnioskuje, że okręgi opisane na trójkątach *ACB* i *ADB* pokrywają się, to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie pełne .....3 pkt

Zdający uzasadni, że kąty *BAC* i *BDC* są równe .

Zadanie 8. (0–3)

Wykaż, że dla każdej liczby nieparzystej *n* wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 3$ jest podzielne przez 16.

Rozwiązanie (I sposób)
Przekształcamy wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 3$ równoważnie w następujący sposób

$$n^4 \cdot (n-3) - (n-3)$$
$$(n^4 - 1) \cdot (n-3)$$
$$(n^2 - 1) \cdot (n^2 + 1) \cdot (n-3)$$
$$(n-1) \cdot (n+1) \cdot (n^2 + 1) \cdot (n-3)$$

Liczba *n* jest nieparzysta więc liczby $(n-1), (n+1), (n^2+1), (n-3)$ są parzyste zatem ich iloczyn jest podzielny przez 2^4.Wyrażenie jest sumą dwóch składników podzielnych przez 16 więc jest podzielne przez 16.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .....1 p.

gdy zapisze wyrażenie w postaci: $(n^4 - 1) \cdot (n-3) + 16$.

Zdający otrzymuje .....2 p.

gdy zapisze nierówność w postaci: $(n-1) \cdot (n+1) \cdot (n^2+1) \cdot (n-3) + 16$ i nie uzasadni podzielności przez 16.

Zdający otrzymuje .....3 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Rozwiązanie (II sposób)
Ponieważ liczba *n* jest nieparzysta możemy zapisać ją w postaci *2k+1*, gdzie *k* jest liczbą całkowitą.
Wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 3$ przyjmuje postać:

$(2k+1)^5-3(2k+1)^4-(2k+1)+3$.

Po przekształceniu wyrażenia równoważnie otrzymujemy
$32n^5+32n^4-16n^3-32n^2-16n+16$,

stąd wyrażenie możemy zapisać w postaci iloczynu $16\left(2n^5+2n^4-n^3-2n^2-n+1\right)$, który jako iloczyn liczby 16 oraz całkowitej liczby $\left(2n^5+2n^4-n^3-2n^2-n+1\right)$ jest podzielny przez 16.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.

gdy zapisze wraz z odpowiednimi założeniami wyrażenie $(2k+1)^5-3(2k+1)^4-(2k+1)+19$ i przekształci poprawnie przynajmniej jedno z wyrażeń.

$(2k+1)^5=32n^5+80n^4+80n^3+40n^2+10n+1$ lub

$(2k+1)^4=16n^4+32n^3+24n^2+8n+1$.

Zdający otrzymuje ..... 2 p.

gdy doprowadzi wyrażenie do postaci $32n^5+32n^4-16n^3-32n^2-16n+16$ i nie uzasadni, że to wyrażenie jest podzielne przez 16.

Zdający otrzymuje ..... 3 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 9. (0–4)

Rozwiąż równanie $4\sin^3 x+\sin 2x=2\sin^2 x\cdot(2\cos x+1)$.

Rozwiązanie (I sposób)

Przekształcamy równanie równoważnie:

$$4\sin^3 x+2\sin x\cos x=4\sin^2 x\cos x+2\sin^2 x$$
$$4\sin^3 x+2\sin x\cos x-4\sin^2 x\cos x-2\sin^2 x=0$$
$$2\sin x\left(2\sin^2 x+\cos x-2\sin x\cos x-\sin x\right)=0$$

Stąd otrzymujemy alternatywę

$$\sin x=0 \text{ lub } 2\sin^2 x+\cos x-2\sin x\cos x-\sin x=0$$
$$\sin x=0 \text{ lub } 2\sin x(\sin x-\cos x)+\cos x-\sin x=0$$
$$\sin x=0 \text{ lub } (\sin x-\cos x)(2\sin x-1)=0$$

Zatem

$$\sin x=0 \text{ lub } \sin x=\cos x \text{ lub } \sin x=\frac{1}{2}$$

Zauważmy, że drugie równanie tej alternatywy jest równoważne równaniu $\operatorname{tg} x=1$.

Gdyby zachodziło $\cos x = 0$, to otrzymalibyśmy równość $\sin x = 0$, a to byłoby sprzeczne z tożsamością $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Ostatecznie zapisujemy cztery serie rozwiązań podanego równania:

$x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie k oznacza liczbę całkowitą.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania
Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania
……..……1p.
Zdający zapisze dane równanie w postaci iloczynu, np.

$$2\sin x\left(2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x\cos x - \sin x\right) = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp…….…… 2p.
Zdający zapisze dane równanie w postaci iloczynu

$$\left(\sin^2 x - \sin x\cdot\cos x\right)(2\sin x - 1) = 0 \text{ lub } \left(2\sin^2 x - \sin 2x\right)(2\sin x - 1) = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....……3p.
Zdający poprawnie rozwiąże **dwa spośród trzech równań**:

$$\sin x = 0,\ 2\sin x - 1 = 0,\ \sin x - \cos x = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy .

Rozwiązanie pełne…….....……4p.
Zdający zapisze cztery serie rozwiązań danego równania:

$x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie k oznacza liczbę całkowitą.

Rozwiązanie (II sposób)
Przekształcamy równanie równoważnie:

$$4\sin^3 x + 2\sin x\cos x = 4\sin^2 x\cos x + 2\sin^2 x$$
$$4\sin^3 x + 2\sin x\cos x - 4\sin^2 x\cos x - 2\sin^2 x = 0$$
$$2\sin x\left(2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x\cos x - \sin x\right) = 0$$

Stąd otrzymujemy alternatywę

$$\sin x = 0 \text{ lub } 2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x\cos x - \sin x = 0$$

Równanie $2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x\cos x - \sin x = 0$ zapisujemy w postaci

$$2\sin^2 x - (2\cos x + 1)\sin x + \cos x = 0$$

i rozwiązujemy je tak samo jak równanie kwadratowe z niewiadomą $\sin x$ i parametrem $\cos x$.

Otrzymujemy wtedy wyróżnik $\Delta = (2\cos x - 1)^2$ oraz dwa rozwiązania:

$$\sin x = \frac{2\cos x + 1 - |2\cos x - 1|}{4} \text{ lub } \sin x = \frac{2\cos x + 1 + |2\cos x - 1|}{4}$$

Jeśli $\cos x \geq \frac{1}{2}$, to otrzymujemy rozwiązania $\sin x = \frac{1}{2}$ lub $\sin x = \cos x$. Zatem w tym przypadku

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Jeśli zaś $\cos x < \frac{1}{2}$, to otrzymujemy rozwiązania $\sin x = \cos x$ lub $\sin x = \frac{1}{2}$. W tym przypadku

$$x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi .$$

Ostatecznie możemy zapisać cztery serie rozwiązań podanego równania:

$x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie k oznacza liczbę całkowitą.

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania
Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania
……..……1p.
Zdający zapisze dane równanie w postaci iloczynu, np.

$$2\sin x\left(2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x\cos x - \sin x\right) = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp……. 2p.
Zdający zapisze równanie $2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x\cos x - \sin x = 0$ w postaci

$$2\sin^2 x - (2\cos x + 1)\sin x + \cos x = 0,$$

obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego z lewej strony równania $\Delta = (2\cos x - 1)^2$ i zapisze dwa rozwiązania tego równania

$$\sin x = \frac{2\cos x + 1 - |2\cos x - 1|}{4} \text{ lub } \sin x = \frac{2\cos x + 1 + |2\cos x - 1|}{4}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....……3p.
Zdający rozpatrzy poprawnie jeden z przypadków:

- jeśli $\cos x \geq \frac{1}{2}$, to $\sin x = \frac{1}{2}$ lub $\sin x = \cos x$.

  Zatem w tym przypadku $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

albo

- jeśli zaś $\cos x < \frac{1}{2}$, to $\sin x = \cos x$ lub $\sin x = \frac{1}{2}$.

  Zatem w tym przypadku $x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$.

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy .

Rozwiązanie pełne…….....…….……4p.
Zdający zapisze cztery serie rozwiązań danego równania:
$x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie k oznacza liczbę całkowitą.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający dzieli obie strony równania przez $\sin x$ **lub** przez $(2\sin x - 1)$, bez zapisania odpowiedniego komentarza opisującego przypadki $\sin x = 0$ oraz $2\sin x - 1 = 0$, to za całe rozwiązanie może otrzymać najwyżej **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający dzieli obie strony równania przez $\sin x$ **i** przez $(2\sin x - 1)$, bez zapisania odpowiedniego komentarza opisującego przypadki $\sin x = 0$ oraz $2\sin x - 1 = 0$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający w rozwiązaniach nie uwzględni okresowości funkcji trygonometrycznych i zapisuje przykładowe rozwiązania z każdej serii, np. $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = \frac{\pi}{4}$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający stosuje w rozwiązaniu fałszywe równości, np. $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, to za całe rozwiązanie może otrzymać najwyżej **2 punkty**, o ile wcześniej nie nabył praw do **3 punktów**.
5. Jeżeli zdający stosuje w rozwiązaniu równość $\sin x \cdot \cos x = \mathrm{tg}x \cdot \cos^2 x$, bez odpowiedniego komentarza, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
6. Jeżeli zdający podczas doprowadzania równania do postaci iloczynu stosuje nieistniejące „wzory” skróconego mnożenia, np.
   $$(a-b-c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad \text{lub} \quad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2),$$
   to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**, o ile wcześniej nie nabył praw do **1 punktu**.

Zadanie 10. (0–4)

Dla pewnych liczb rzeczywistych $a>1$, $b>1$ i $N>1$ jest spełniona równość

$$\log_{a^2b} N = \frac{3}{20}\cdot\left(\log_a N + \log_b N\right).$$

Wyznacz wszystkie wartości wyrażenia $\log_a b$.

Rozwiązanie

Wprowadzamy jednakową podstawę a dla logarytmów i otrzymujemy:

$$\frac{20\log_a N}{\log_a\left(a^2b\right)} = 3\left(\log_a N + \frac{\log_a N}{\log_a b}\right)$$

Ponieważ $\log_a N \neq 0$, więc powyższa równość jest równoważna równości

$$\frac{20}{2+\log_a b} = 3 + \frac{3}{\log_a b}$$

Zapisujemy zatem kolejno:

$$20\log_a b = 3\log_a b\left(2+\log_a b\right) + 3\left(2+\log_a b\right)$$

$$3\left(\log_a b\right)^2 - 11\log_a b + 6 = 0.$$

To równanie ma dwa rozwiązania $\log_a b = 3$ lub $\log_a b = \frac{2}{3}$, będące poszukiwanymi wartościami wyrażenia $\log_a b$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania

……1p.

Zdający zapisze podaną równość w postaci $\frac{20\log_a N}{\log_a\left(a^2b\right)} = 3\left(\log_a N + \frac{\log_a N}{\log_a b}\right)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp

.....……2p.

Zdający zapisze równanie wymierne z niewiadomą $\log_a b$.

$$\frac{20}{2+\log_a b} = 3 + \frac{3}{\log_a b}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....……...……3p.

Zdający przekształci powyższe równanie do postaci równania kwadratowego, np.

$$20\log_a b = 3\log_a b\left(2+\log_a b\right) + 3\left(2+\log_a b\right)$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne…….....……...…4p.

Zdający rozwiąże powyższe równanie i zapisze, że szukane wyrażenie przyjmuje dwie wartości:

$$\log_a b = 3 \text{ lub } \log_a b = \frac{2}{3}.$$

Uwagi:

1. Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci: $\log_b a = \frac{3}{2}$ lub $\log_b a = \frac{1}{3}$.
2. Jeśli zdający pominie kwadrat w wyrażeniu $\log_{a^2 b} N$ i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, otrzymując odpowiedź: $\log_a b = \frac{19}{3}$, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeśli zdający korzysta w rozwiązaniu z fałszywych równości, np. $\log_{a^2 b} N = \frac{1}{2}\log_{ab} N$, to otrzymuje **0 punktów**, chyba że wcześniej nabył praw do 1 punktu.

Zadanie 11. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których nierówność

$$\left(m^2+4m-5\right)\cdot x^2+2x>2mx-2$$

jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x.

Rozwiązanie

Zapiszemy nierówność w następującej postaci

$$\left(m^2+4m-5\right)\cdot x^2+2x\left(1-m\right)+2>0$$

Zauważamy, że $m^2+4m-5=\left(m-1\right)\left(m+5\right)$. Wynika stąd, że należy rozważyć dwie sytuacje:

- nierówność liniowa
  1) Jeśli $m=1$, to otrzymujemy nierówność $2>0$, która jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x.
  2) Jeśli $m=-5$, to otrzymujemy nierówność $12x+2>0$, która jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej $x>-\frac{1}{6}$.
- nierówność kwadratowa
  3) Jeśli $m\neq 1$ i $m\neq -5$, to należy sprawdzić, kiedy zachodzą jednocześnie dwie nierówności:

$$a>0 \text{ i } \Delta<0,$$

gdzie $a=\left(m-1\right)\left(m+5\right)$ jest współczynnikiem trójmianu $\left(m^2+4m-5\right)\cdot x^2+2x\left(1-m\right)+2$ przy najwyższej potędze zmiennej x, zaś $\Delta=b^2-4ac$ jest wyróżnikiem tego trójmianu. Zapisujemy kolejno:

$$\left(m-1\right)\left(m+5\right)>0 \Leftrightarrow m<-5 \text{ lub } m>1.$$

$$\Delta=4\left(1-m\right)^2-4\left(m-1\right)\left(m+5\right)\cdot 2=4\left(m-1\right)^2-8\left(m-1\right)\left(m+5\right)=-4\left(m-1\right)\left(m+11\right)$$

$$-4\left(m-1\right)\left(m+11\right)<0 \Leftrightarrow m<-11 \text{ lub } m>1.$$

Zatem nierówności $a>0$ i $\Delta<0$ zachodzą jednocześnie dla $m<-11$ lub $m>1$.

Łącząc wyniki z punktów 1) i 3), otrzymujemy odpowiedź ostateczną: $m<-11$ lub $m\geq 1$.

Schemat punktowania

Składa się on z dwóch części.

Pierwsza, to rozpatrzenie przypadku nierówności liniowej. Zdający może za tę część otrzymać maksymalnie **2 punkty**.

Druga, to rozpatrzenie przypadku nierówności kwadratowej. Zdający może za tę część otrzymać maksymalnie 3 **punkty**.

Schemat punktowania części pierwszej

1 punkt przyznajemy zdającemu, który zauważy i zapisze, że dla $m=1$ albo dla $m=-5$ podana nierówność jest liniowa i poprawnie zbada jeden z tych przypadków.

2 punkty przyznajemy zdającemu, który poprawnie określi, że dla $m=1$ nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x, zaś dla $m=-5$ tak nie jest.

Schemat punktowania części drugiej

1 punkt przyznajemy zdającemu, który zapisze, że nierówność kwadratowa jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x wtedy, gdy parametr m spełnia układ nierówności

$$m^2+4m-5>0 \text{ i } \Delta<0$$

albo

$$m^2+4m-5>0 \text{ i } y_W>0, \text{ gdzie } y_W=-\frac{\Delta}{4a}$$

2 punkty przyznajemy zdającemu, który poprawnie rozwiąże jedną z dwóch nierówności

$$m^2+4m-5>0 \text{ , czyli } (m-1)(m+5)>0 \Leftrightarrow m<-5 \text{ lub } m>1$$

lub

$$\Delta=-4(m-1)(m+11)<0$$

$$-4(m-1)(m+11)<0 \Leftrightarrow m<-11 \text{ lub } m>1$$

3 punkty przyznajemy zdającemu, który poprawnie rozwiąże obie nierówności $a>0$ i $\Delta<0$

oraz

zapisze końcową odpowiedź do zadania: Dla $m<-11$ lub $m\geq 1$ podana nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x.

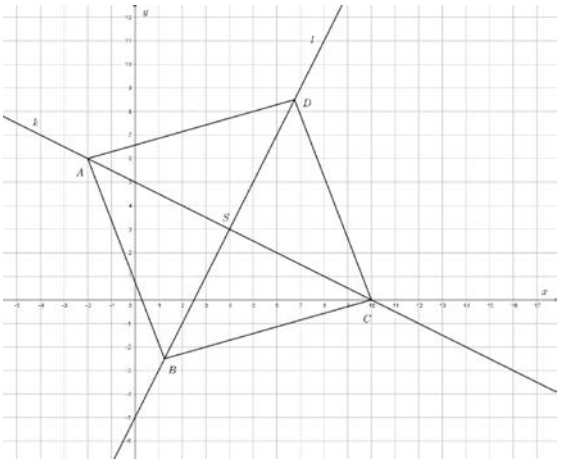
Uwagi:

1. Jeśli zdający w części drugiej rozwiązania zapisze jedynie nierówność $\Delta<0$ i nawet bezbłędnie tę nierówność rozwiąże, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeśli zdający zapisze w drugiej części rozwiązania układ nierówności $m^2+4m-5\neq 0$ i $\Delta<0$,
   a następnie konsekwentnie rozwiąże ten układ do końca, to za drugą część rozwiązania może otrzymać maksymalnie **1 punkt**.
3. Jeśli zdający w części drugiej rozwiązania zapisze układ nierówności $m^2+4m-5>0$ i $\Delta>0$,
   a następnie nawet bezbłędnie ten układ rozwiąże, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

   Jeśli zdający zapisze w części drugiej rozwiązania układ nierówności $m^2+4m-5>0$ i $\Delta\leq 0$,
   i konsekwentnie rozwiąże tę część do końca, to za tę część może otrzymać maksymalnie
   2 punkty.

Zadanie 12. (0–6)

Punkt $A=(-2,6)$ jest wierzchołkiem rombu *ABCD* o polu 82,5. Przekątna *BD* zawiera się w prostej *l* o równaniu $2x-y-5=0$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu.



Rozwiązanie (I sposób)

Wyznaczamy równanie prostej *k* zawierającej przekątną *AC* rombu (prosta *k* jest prostopadła do prostej *l*, punkt *A* leży na prostej *k*.

$k: y=-\frac{1}{2}x+5$

Z układu równań $\begin{cases} y=2x-5 \\ y=-\frac{1}{2}x+5 \end{cases}$ wyznaczamy współrzędne punktu $S=(4,3)$ (środek symetrii rombu). Punkt *S* jest jednocześnie środkiem przekątnej *AC*, co pozwala obliczyć współrzędne wierzchołka $C=(10,0)$.

Obliczamy długość przekątnej $|AC|=6\sqrt{5}$, a następnie, wykorzystując informację o polu rombu, obliczamy długość drugiej przekątnej.

$\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=82,5$

$\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{5}\cdot|BD|=82,5$

$|BD|=\frac{11}{2}\sqrt{5}$

Punkty *B* oraz *D* leżą na okręgu o środku $S=(4,3)$ i promieniu $\frac{1}{2}|BD|=\frac{11}{4}\sqrt{5}$ oraz na prostej *l*. Wyznaczamy ich współrzędne rozwiązując układ równań

$$\begin{cases}(x-4)^2+(y-3)^2=\frac{121}{16}\cdot 5\\ y=2x-5\end{cases}$$

Otrzymujemy punkty $B=\left(\frac{5}{4},-\frac{5}{2}\right)$ oraz $D=\left(\frac{27}{4},\frac{17}{2}\right)$.

Uwaga
Długość odcinka *AS* można obliczyć również jako odległość punktu *A* od prostej *l*.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.
gdy

- wyznaczy równanie prostej
  $k: y=-\frac{1}{2}x+5$

albo

- wyznaczy $|AS|=3\sqrt{5}$, jako odległość punktu *A* od prostej *l* .

Zdający otrzymuje ..... 2 p.

gdy

- wyznaczy równanie prostej $k: y=-\frac{1}{2}x+5$ oraz obliczy współrzędne punktów
  $S=(4,3)$ oraz $C=(10,0)$

albo

- wyznaczy $|AS|=3\sqrt{5}$, jako odległość punktu *A* od prostej *l* oraz obliczy długości przekątnych $|AC|=6\sqrt{5}$ oraz $|BD|=\frac{11}{2}\sqrt{5}$.

Zdający otrzymuje ..... 3 p.

gdy wyznaczy równanie prostej $k: y=-\frac{1}{2}x+5$ oraz obliczy współrzędne punktów
$S=(4,3)$ oraz $C=(10,0)$ i długość przekątnej $|BD|=\frac{11}{2}\sqrt{5}$.

Zdający otrzymuje ..... 4 p.

gdy zapisze układ równań wystarczający do obliczenia współrzędnych punktów B oraz D,

np. $\begin{cases}(x-4)^2+(y-3)^2=\frac{121}{16}\cdot 5\\ y=2x-5\end{cases}$

Zdający otrzymuje ..... 5 p.

gdy rozwiąże zadanie do końca, popełniając błąd rachunkowy.

Zdający otrzymuje ..... 6 p.

gdy poprawnie rozwiąże układ równań i poda bezbłędnie odpowiedź

$B=\left(\frac{5}{4},-\frac{5}{2}\right), C=(10,0),\ D=\left(\frac{27}{4},\frac{17}{2}\right).$

Rozwiązanie (II sposób)

Wyznaczamy równanie prostej $k: y=-\frac{1}{2}x+5$ oraz obliczamy współrzędne punktu $C=(10,0)$ (jak w sposobie I). Zauważamy, że pole trójkąta *ABC* jest połową pola rombu *ABCD* i wynosi $41\frac{1}{4}$. Wyznaczamy pole trójkąta *ABC* w zależności od współrzędnych punktu $B=(x_B, y_B)$

$P_{\Delta ABC}=\left|-6y_B-3x_B+30\right|$

Punkt *B* leży na prostej *l*, więc jego współrzędne spełniają równanie tej prostej.
Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases}\left|-6y_B-3x_B+30\right|=41\frac{1}{4}\\ y_B=2x_B-5\end{cases}$$

Rozwiązaniami układu są dwie pary liczb $\left(\frac{5}{4},-\frac{5}{2}\right)$ oraz $\left(\frac{27}{4},\frac{17}{2}\right)$. Zauważamy, że takie same warunki spełnia punkt *D* (pole trójkąta *ABD* jest połową pola rombu oraz punkt *D* leży na prostej *l*. Wyciągamy wniosek, że otrzymane pary liczb to współrzędne wierzchołków *B* oraz *D*.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.
gdy wyznaczy równanie prostej
$k: y = -\frac{1}{2}x + 5$

Zdający otrzymuje ..... 2 p.
gdy
wyznaczy równanie prostej $k: y = -\frac{1}{2}x + 5$ oraz obliczy współrzędne punktów $S = (4,3)$
i $C = (10,0)$.

Zdający otrzymuje ..... 3 p.
gdy zauważy, że pole trójkąta *ABC* jest połową pola rombu *ABCD* i wynosi $41\frac{1}{4}$ i zapisze
równanie $|-6y_B - 3x_B + 30| = 41\frac{1}{4}$

Zdający otrzymuje ..... 4 p.
gdy zapisze układ równań wystarczający do obliczenia współrzędnych punktów *B* oraz *D*
$$\begin{cases} |-6y_B - 3x_B + 30| = 41\frac{1}{4} \\ y_B = 2x_B - 5 \end{cases}$$

Zdający otrzymuje ..... 5 p.
gdy rozwiąże zadanie do końca, popełniając błąd rachunkowy.

Zdający otrzymuje ..... 6 p.
gdy poprawnie rozwiąże układ równań i poda bezbłędnie odpowiedź
$$B = \left(1\frac{1}{4}, -2\frac{1}{2}\right), C = (10,0),\ D = \left(6\frac{3}{4}, 8\frac{1}{2}\right).$$

Rozwiązanie (III sposób)

Przyjmijmy oznaczenie współrzędnych punktu $C = (x_C, y_C)$. Wyznaczamy współrzędne wektora $\overrightarrow{AC} = [x_C + 2, y_c - 6]$.

Wektor $\overrightarrow{AC}$ jest prostopadły do prostej $2x - y - 5 = 0$ Istnieje zatem $p \in \mathbb{R}$, dla którego $\overrightarrow{AC} = [2p, -p]$

Obliczamy długość wektora $\overrightarrow{AC}$ jako podwojoną odległość punktu *A* od prostej *l*.
$\overrightarrow{AC} = 6\sqrt{5}$

Wtedy $\sqrt{(2p)^2 + (-p)^2} = 6\sqrt{5}$ stąd $p = 6$ lub $p = -6$.

Zatem
$[x_C + 2, y_C - 6] = [12, -6]$ lub $[x_C + 2, y_C - 6] = [-12, 6]$
$C_1 = (10,0), \quad C_2 = (-14,12)$

Odrzucamy drugie rozwiązanie (np. na podstawie obserwacji, że środek odcinka AC_2 nie leży na prostej *l*. Dalej postępujemy, jak w I lub II sposobie.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.

gdy zapisze $\overrightarrow{AC}=[2p,-p]$, $\overrightarrow{AC}=[x_C+2, y_c-6]$ oraz obliczy $\overrightarrow{AC}=6\sqrt{5}$.

Zdający otrzymuje ..... 2 p.

gdy rozwiąże równanie $\sqrt{(2p)^2+(-p)^2}=6\sqrt{5}$, wyznaczy współrzędne punktu $C_1=(10,0)$ i uzasadni odrzucenie drugiego rozwiązania.

Dalszą część rozwiązania oceniamy jak w sposobie I lub II.

Zadanie 13. (0–3)

Oblicz, ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że w zapisie dziesiętnym iloczyn wszystkich cyfr każdej z tych liczb jest równy 28.

Rozwiązanie

Zauważamy, że naturalna liczba siedmiocyfrowa, w której iloczyn wszystkich cyfr jest równy 28 może być zbudowana z dwóch zestawów cyfr: pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka lub cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka.

Obliczamy ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych zbudowanych z cyfr: pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka.

Cyfrę 7 możemy zapisać na jednym z siedmiu miejsc, cyfrę 4 na jednym z sześciu miejsc, a pozostałe pięć miejsc wypełnią jedynki.

Stosujemy regułę mnożenia: $7\cdot 6\cdot 1=42$.

Obliczamy ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych zbudowanych z cyfr: cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka. Wybieramy najpierw miejsce dla cyfry 7, następnie dwa miejsca dla dwóch cyfr 2, a pozostałe miejsca wypełnią jedynki.

Stosujemy kolejny raz regułę mnożenia: $7\cdot\binom{6}{2}\cdot 1=7\cdot 15\cdot 1=105$.

Teraz stosujemy regułę dodawania: $42+105=147$.

Jest 147 siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym jest równy 28.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.

gdy zapisze że naturalna liczba siedmiocyfrowa, w której iloczyn wszystkich cyfr jest równy 28 może być zbudowana z dwóch zestawów cyfr: pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka lub cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka.

Zdający otrzymuje ..... 2 p.

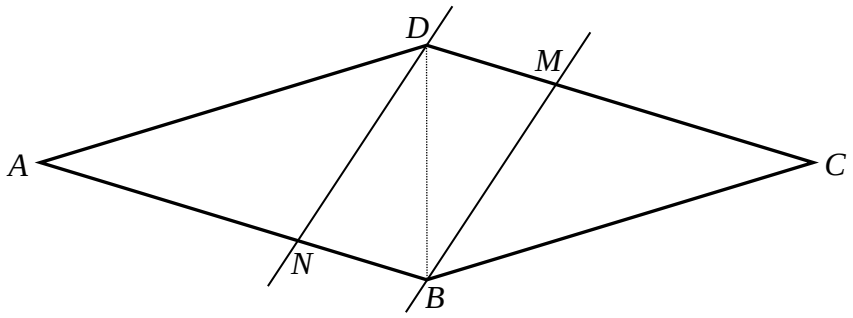
gdy obliczy ile jest liczb siedmiocyfrowych zbudowanych z cyfr: cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka lub zbudowanych z cyfr: cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka: odpowiednio 42 i 105.

Zdający otrzymuje ..... 3 p.

gdy obliczy, że jest 147 siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym jest równy 28.

Zadanie 14. (0–6)

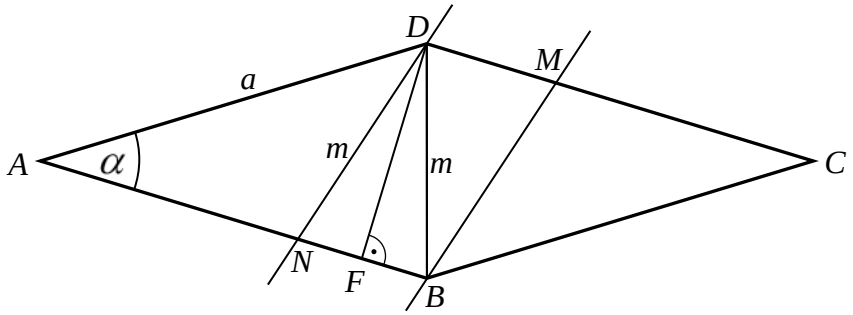
Dany jest romb $ABCD$. Przez wierzchołki B i D poprowadzono dwie proste równoległe przecinające boki CD i AB – odpowiednio – w punktach M i N, tak, że podzieliły one ten romb na trzy figury AND, $NBMD$, BCM o równych polach oraz $|MB| = |ND| = |BD|$ (zobacz rysunek). Oblicz cosinus kąta ostrego tego rombu.



Przykładowe sposoby rozwiązania zadania

I sposób

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Przekątna BD dzieli romb $ABCD$ na dwa trójkąty o równych polach, a jednocześnie dzieli równoległobok $BMDN$ na dwa trójkąty o równych polach. Ponieważ pole tego równoległoboku jest równe polu trójkąta AND, więc pole trójkąta AND jest dwa razy większe od pola trójkąta BDN. Trójkąty AND i BDN mają tę samą wysokość opuszczoną z wierzchołka D, więc stosunek ich pól jest równy stosunkowi długości ich podstaw, czyli

$$|AN| = 2|NB|.$$

Zatem $|NB| = \frac{a}{3}$.

Trójkąt *NBD* jest równoramienny, więc spodek *F* jego wysokości *DF* jest środkiem podstawy *NB*. Stąd wynika, że $|FB| = \frac{a}{6}$, więc $|AF| = a - \frac{a}{6} = \frac{5}{6}a$.

Z trójkąta prostokątnego *AFD* otrzymujemy

$$\cos\alpha = \frac{|AF|}{|AD|} = \frac{\frac{5}{6}a}{a} = \frac{5}{6}.$$

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .....1 pkt

Zdający

- zapisze, że stosunek pól trójkątów *AND* i *BDN* jest równy stosunkowi długości ich podstaw zawartych w prostej *AB*

albo

- zaznaczy wysokość *DF* trójkąta *NBD* i zapisze, że odcinki *NF* i *FB* są równe

albo

- zapisze układ równań pozwalający wyznaczyć długość odcinka *AN* (lub *NB*) w zależności od długości boku rombu: $P_{ABCD} = a^2 \sin\alpha$ i $P_{AND} = \frac{1}{2}ax\sin\alpha$ i $P_{AND} = \frac{1}{3}P_{ABCD}$, gdzie $x = |AN|$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt

Zdający wyznaczy długość odcinka *AN* (lub *NB*) w zależności od długości boku rombu: $|AN| = \frac{2}{3}a$ ($|NB| = \frac{1}{3}a$).

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt

Zdający wyznaczy długość odcinka *FB* w zależności od długości boku rombu lub wykorzysta definicję cosinusa w trójkącie prostokątnym *AFD*: $|FB| = \frac{1}{6}a$ lub $\cos\alpha = \frac{|AF|}{|AD|}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....4 pkt

Zdający wyznaczy długość odcinka *FB* w zależności od długości boku rombu i wykorzysta definicję cosinusa w trójkącie prostokątnym *AFD*: $|FB| = \frac{1}{6}a$ i $\cos\alpha = \frac{|AF|}{|AD|}$.

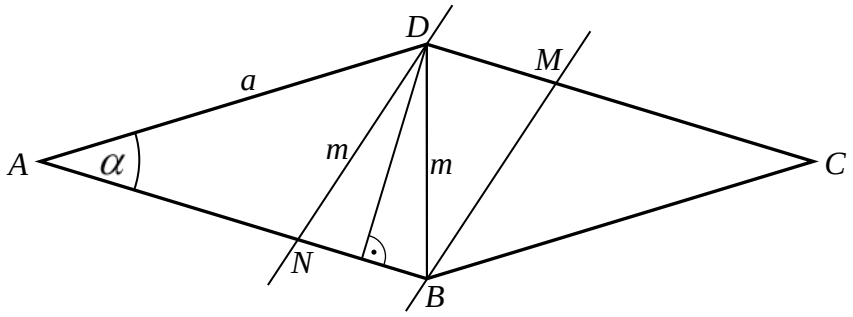
Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .....5 pkt

Rozwiązanie pełne .....6 pkt

Zdający obliczy $\cos\alpha$: $\cos\alpha=\frac{5}{6}$.

II sposób

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Przekątna *BD* dzieli romb *ABCD* na dwa trójkąty o równych polach, a jednocześnie dzieli równoległobok *BMDN* na dwa trójkąty o równych polach. Ponieważ pole tego równoległoboku jest równe polu trójkąta *AND*, więc pole trójkąta *AND* jest dwa razy większe od pola trójkąta *BDN*. Trójkąty *AND* i *BDN* mają tę samą wysokość opuszczoną z wierzchołka *D*, więc stosunek ich pól jest równy stosunkowi długości ich podstaw, czyli

$$|AN|=2|NB|.$$

Zatem $|AN|=\frac{2}{3}a$.

Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów *ABD* i *AND* otrzymujemy

$$|BD|^2=|AB|^2+|AD|^2-2|AB|\cdot|AD|\cos\alpha \text{ oraz } |ND|^2=|AN|^2+|AD|^2-2|AN|\cdot|AD|\cos\alpha,$$

czyli

$$m^2=a^2+a^2-2a\cdot a\cos\alpha \text{ oraz } m^2=\left(\frac{2}{3}a\right)^2+a^2-2\cdot\frac{2}{3}a\cdot a\cos\alpha,$$

$$m^2=a^2\left(2-2\cos\alpha\right) \text{ oraz } m^2=a^2\left(\frac{13}{9}-\frac{4}{3}\cos\alpha\right).$$

Stąd

$$a^2\left(2-2\cos\alpha\right)=a^2\left(\frac{13}{9}-\frac{4}{3}\cos\alpha\right),$$

$$2-2\cos\alpha=\frac{13}{9}-\frac{4}{3}\cos\alpha,$$

$$\frac{2}{3}\cos\alpha=\frac{5}{9},$$

$$\cos\alpha=\frac{5}{6}.$$

Uwaga

Obliczenie, jaką częścią boku rombu jest odcinek *AN*, możemy też wykonać, korzystając ze wzoru na pole trójkąta $P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Niech $|AN|=x$. Wtedy pole rombu *ABCD* jest równe

$$P_{ABCD}=a^2\sin\alpha,$$

a pole trójkąta *AND* jest równe

$$P_{AND}=\frac{1}{2}ax\sin\alpha.$$

Pole trójkąta *AND* to jedna trzecia pola rombu, więc

$$\frac{1}{2}ax\sin\alpha=\frac{1}{3}a^2\sin\alpha.$$

Stąd

$$x=\frac{2}{3}a.$$

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .....1 pkt

Zdający

- zapisze, że stosunek pól trójkątów *AND* i *BDN* jest równy stosunkowi długości ich podstaw zawartych w prostej *AB*

albo

- zapisze dwa równania wynikające z twierdzenia cosinusów dla trójkątów *ABD* i *AND*: $m^2=a^2+a^2-2a\cdot a\cos\alpha$, $m^2=x^2+a^2-2\cdot x\cdot a\cos\alpha$, gdzie $x=|AN|$

albo

- zapisze układ równań pozwalający wyznaczyć długość odcinka *AN* w zależności od długości boku rombu: $P_{ABCD}=a^2\sin\alpha$ i $P_{AND}=\frac{1}{2}ax\sin\alpha$ i $P_{AND}=\frac{1}{3}P_{ABCD}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt

Zdający wyznaczy długość odcinka *AN* (lub *NB*) w zależności od długości boku rombu: $|AN|=\frac{2}{3}a$ ($|NB|=\frac{1}{3}a$).

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt

Zdający zapisze jedno z równań, które pozwala obliczyć cosinus kąta ostrego rombu:

$m^2=a^2\left(2-2\cos\alpha\right)$ lub $m^2=a^2\left(\frac{13}{9}-\frac{4}{3}\cos\alpha\right)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....4 pkt

Zdający zapisze układ równań, pozwalający obliczyć cosinus kąta ostrego rombu:

$m^2=a^2\left(2-2\cos\alpha\right)$ oraz $m^2=a^2\left(\frac{13}{9}-\frac{4}{3}\cos\alpha\right)$.

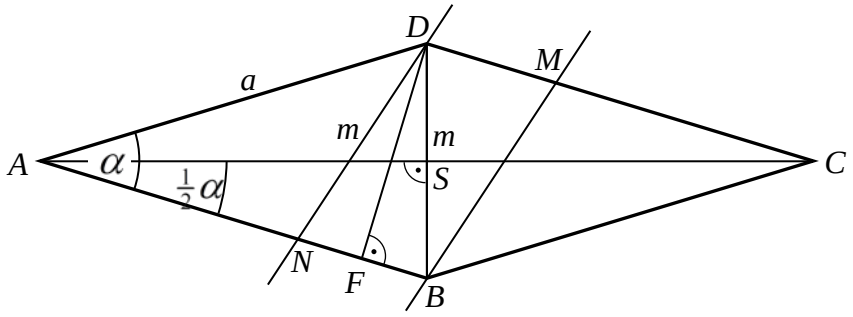
Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .....5 pkt

Rozwiązanie pełne .....6 pkt

Zdający obliczy $\cos\alpha$: $\cos\alpha = \frac{5}{6}$.

III sposób

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Przekątna *BD* dzieli równoległobok *BMDN* na dwa trójkąty o równych polach. Ponieważ pole tego równoległoboku to jedna trzecia pola rombu, więc pole trójkąta *NBD* jest szóstą częścią pola rombu. Trójkąt *NBD* jest równoramienny, więc jego wysokość *DF* dzieli go na dwa trójkąty przystające. Zatem pole trójkąta *FBD* jest dwunastą częścią pola rombu.

Przekątne rombu dzielą go na cztery trójkąty przystające, więc pole trójkąta *SBA* jest czwartą częścią pola rombu.

Zauważmy teraz, że trójkąty *FBD* i *SBA* są podobne, gdyż oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku *B*. Skala *s* tego podobieństwa jest równa

$$s=\frac{|DB|}{|AB|}=\frac{m}{a}.$$

Kwadrat skali tego podobieństwa jest równy stosunkowi pól tych trójkątów, czyli

$$s^2=\frac{P_{FBD}}{P_{SBA}}=\frac{\frac{1}{12}P_{ABCD}}{\frac{1}{4}P_{ABCD}}=\frac{1}{3}.$$

Zatem

$$\left(\frac{m}{a}\right)^2=\frac{1}{3},$$

$$m^2=\frac{1}{3}a^2.$$

Stąd $m=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Z trójkąta *SBA* otrzymujemy

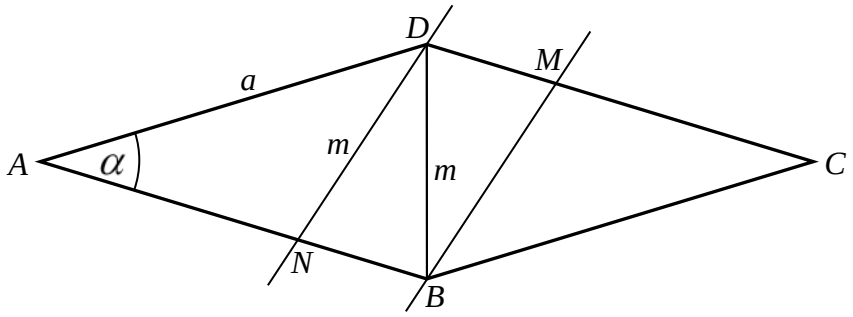
$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{1}{2}m}{a}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}}{a}=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Ze wzoru na cosinus podwojonego kąta mamy więc

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-2\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2=1-\frac{2}{12}=\frac{5}{6}.$$

IV sposób

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Przekątna *BD* dzieli równoległobok *BMDN* na dwa trójkąty o równych polach oraz romb *ABCD* na dwa trójkąty o równych polach. Ponieważ pole tego równoległoboku to jedna trzecia pola rombu, więc pole trójkąta *NBD* jest trzecią częścią pola trójkąta *BDA*. Trójkąty *NBD* i *BDA* są równoramienne i mają ten sam kąt przy wierzchołku *B* , a jest to kąt przy podstawie każdego z tych trójkątów, więc trójkąty te są podobne. Skala *s* tego podobieństwa jest równa

$$s=\frac{|DB|}{|AB|}=\frac{m}{a}.$$

Kwadrat skali tego podobieństwa jest równy stosunkowi pól tych trójkątów, czyli

$$s^2=\frac{P_{NBD}}{P_{BDA}}=\frac{\frac{1}{3}P_{BDA}}{P_{BDA}}=\frac{1}{3}.$$

Zatem

$$\left(\frac{m}{a}\right)^2=\frac{1}{3},$$

$$m^2=\frac{1}{3}a^2.$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta *BDA* otrzymujemy

$$|BD|^2=|AB|^2+|AD|^2-2|AB|\cdot|AD|\cos\alpha,$$

czyli

$$m^2=a^2+a^2-2a\cdot a\cos\alpha,$$

$$\frac{1}{3}a^2=a^2\left(2-2\cos\alpha\right),$$

$$\frac{1}{3}=2-2\cos\alpha,$$

$$2\cos\alpha=\frac{5}{3},$$

$$\cos\alpha=\frac{5}{6}.$$

Schemat punktowania III i IV sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .....1 pkt

Zdający

- zapisze, że pole trójkąta *FBD* jest dwunastą częścią pola rombu *ABCD*

albo

- zapisze, że pole trójkąta *SBA* jest czwartą częścią pola rombu *ABCD*

albo

- zapisze, że pole trójkąta *NBD* jest trzecią częścią pola trójkąta *BDA*.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt

Zdający

- zapisze, że trójkąty *FBD* i *SBA* są podobne i $P_{FBD}=\frac{1}{12}P_{ABCD}$, i $P_{SBA}=\frac{1}{4}P_{ABCD}$

albo

- zapisze, że trójkąty *NBD* i *BDA* są podobne i $P_{NBD}=\frac{1}{3}P_{BDA}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt

Zdający

- zapisze układ równań z niewiadomymi m, a, $\cos\alpha$, np.:
  $m^2=\frac{1}{3}a^2$ i $m^2=a^2+a^2-2a\cdot a\cos\alpha$

lub

- obliczy wartość dowolnej funkcji trygonometrycznej kąta $\frac{\alpha}{2}$, np.: $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....4 pkt

Zdający

- zapisze układ równań z niewiadomymi m, a, $\cos\alpha$, np.:
  $m^2=\frac{1}{3}a^2$ i $m^2=a^2+a^2-2a\cdot a\cos\alpha$

oraz

- obliczy wartość dowolnej funkcji trygonometrycznej kąta $\frac{\alpha}{2}$, np.: $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .....5 pkt

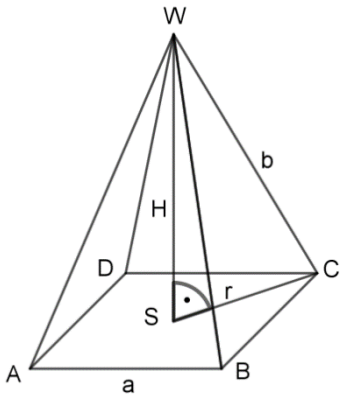
Rozwiązanie pełne .....6 pkt

Zdający obliczy $\cos\alpha$: $\cos\alpha=\frac{5}{6}$.

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie ostrosłupy prawidłowe czworokątne, w których suma promienia okręgu opisanego na podstawie i długości krawędzi bocznej jest równa d. Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozpatrywanych ostrosłupów, który ma największą objętość. Oblicz tę objętość.

Rozwiązanie (I sposób)



Wprowadzamy oznaczenia: r – promień okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa, b – krawędź boczna, a – krawędź podstawy, H – wysokość ostrosłupa.

Z zależności $r+b=d$ wyznaczamy $b=d-r$. W trójkącie SCW stosujemy tw. Pitagorasa:
$H^2=b^2-r^2=(b-r)(b+r)=d(b-r)=d(d-r-r)=d(d-2r)$

skąd wyznaczamy $H=\sqrt{d(d-2r)}$.

Zauważamy, że $r>0$ oraz $d-2r>0$, czyli $r\in\left(0,\frac{d}{2}\right)$.

Wyznaczamy a w zależności od r: $a=r\sqrt{2}$ i zapisujemy objętość ostrosłupa w zależności od zmiennej r.

$V(r)=\frac{1}{3}r^2\cdot 2\sqrt{d^2-2dr}=\frac{2}{3}\sqrt{r^4d^2-2r^5d}$ dla $r\in\left(0,\frac{d}{2}\right)$.

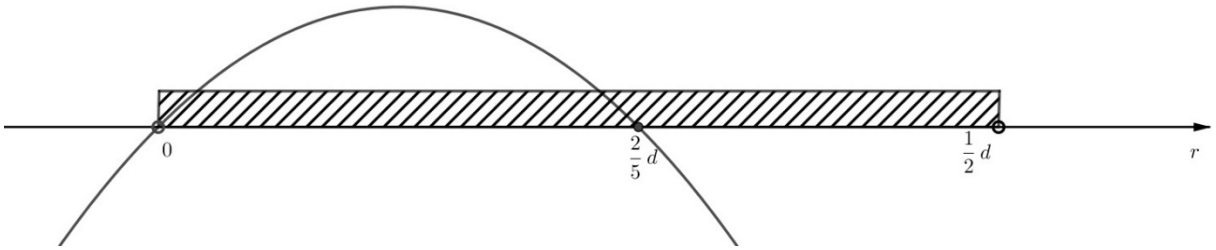
Rozważamy funkcję pomocniczą $f(r)=r^4d^2-2r^5d$, której dziedziną jest przedział $\left(0,\frac{d}{2}\right)$.

Aby znaleźć maksimum lokalne tej funkcji, wyznaczamy jej pochodną
$f'(r)=4r^3d^2-10r^4d=2r^3d(2d-5r)$

Jedynym miejscem zerowym z przedziału $\left(0,\frac{d}{2}\right)$ jest $r=\frac{2}{5}d$

($r=0$ nie należy do dziedziny funkcji f).

Analizujemy monotoniczność funkcji f (np. na podstawie wykresu znaku pochodnej):



$f'(r)>0$ dla $r\in\left(0,\frac{2}{5}d\right)$ (funkcja w tym przedziale rośnie),

$f'(r)<0$ dla $r\in\left(\frac{2}{5}d,\frac{1}{2}d\right)$ (funkcja w tym przedziale maleje).

Wnioskujemy, że funkcja osiąga maksimum lokalne dla $r=\frac{2}{5}d$. Z analizy monotoniczności funkcji w dziedzinie wynika, że jest to jednocześnie największa wartość funkcji w dziedzinie.

Ponieważ funkcja $g(x)=\sqrt{x}$ jest funkcją rosnącą, funkcja V oraz funkcja f są rosnące i malejące w tych samych przedziałach i przyjmują maksimum lokalne dla tego samego argumentu.

Wobec tego, ostrosłup ma największą objętość dla $r=\frac{2}{5}d$, czyli dla $a=\frac{2\sqrt{2}}{5}d$. Wysokość tego ostrosłupa jest równa $H=\sqrt{d\left(d-\frac{4}{5}d\right)}=\frac{\sqrt{5}}{5}d$ .Szukana objętość jest równa $V=\frac{8\sqrt{5}}{375}d^3$.

Odp. Największą objętość ma ostrosłup o krawędzi podstawy $a=\frac{2\sqrt{2}}{5}d$, objętość ta jest równa $V=\frac{8\sqrt{5}}{375}d^3$.

Schemat oceniania
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap składa się z trzech części:

a) wyznaczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa oraz wysokości w zależności od długości promienia okręgu opisanego na podstawie

b) zapisanie objętości ostrosłupa jako funkcji zmiennej r: $V(r)=\frac{2}{3}\sqrt{r^4d^2-2r^5d}$,

c) określenie dziedziny funkcji V: $r\in\left(0,\frac{d}{2}\right)$.

Za każdą z części tego etapu zdający otrzymuje po **1 punkcie.**
Drugi etap składa się z trzech części:

a) wprowadzenie funkcji pomocniczej $f(r)=r^4d^2-2r^5d$ i wyznaczenie pochodnej $f'(r)=4r^3d^2-10r^4d=24r^3d(2d-5r)$

b) obliczenie miejsca zerowego pochodnej $r=\frac{2}{5}d$,

c) uzasadnienie, że dla $r=\frac{2}{5}d$ funkcja f osiąga największą wartość oraz że dla takiej wartości promienia objętość ostrosłupa jest największa.

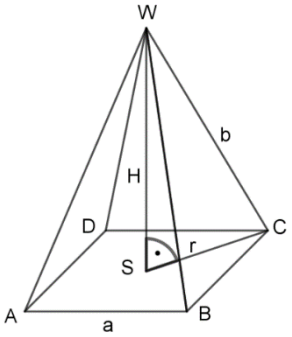
Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

Uwaga
Jeżeli zdający nie wyznaczy dziedziny funkcji *V*, to nie może otrzymać punktu za ostatnią część etapu drugiego (uzasadnienie).

- Trzeci etap.
  Obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa o największej objętości: $a=\frac{2\sqrt{2}}{5}d$. Wyznaczenie największej objętości ostrosłupa: $V=\frac{8\sqrt{5}}{375}d^3$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Rozwiązanie (II sposób)



Wprowadzamy oznaczenia, jak w I sposobie.
Z zależności $r+b=d$ wyznaczamy $b=d-r$. W trójkącie *SCW* stosujemy tw. Pitagorasa:

$$H^2=d(d-2r)/:d \quad (d\neq 0)$$

$$\frac{H^2}{d}=d-2r$$

$$r=\frac{1}{2}\left(d-\frac{H^2}{d}\right)=\frac{1}{2d}\left(d^2-H^2\right)$$

Obliczamy pole podstawy ostrosłupa $P_P=\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot 2r=2r^2$ oraz objętość

$$V=\frac{1}{3}\cdot 2r^2H=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4d^2}\left(d^2-H^2\right)^2\cdot H$$

$$V(H)=\frac{1}{6d^2}\left(d^4H-2d^2H^3+H^5\right)$$

Z warunków geometrycznych $H>0$ i $H<r+b$ (nierówność trójkąta w trójkącie *SWC*) wyznaczamy dziedzinę funkcji *V*:

$H \in (0, d)$

Aby znaleźć maksimum lokalne tej funkcji, wyznaczamy jej pochodną

$V'(H) = \frac{1}{6d^2}\left(5H^4 - 6d^2H^2 + d^4\right)$

Obliczamy miejsca zerowe i analizujemy znak pochodnej

$V'(H) = 0 \Leftrightarrow 5H^4 - 6d^2H^2 + d^4 = 0$

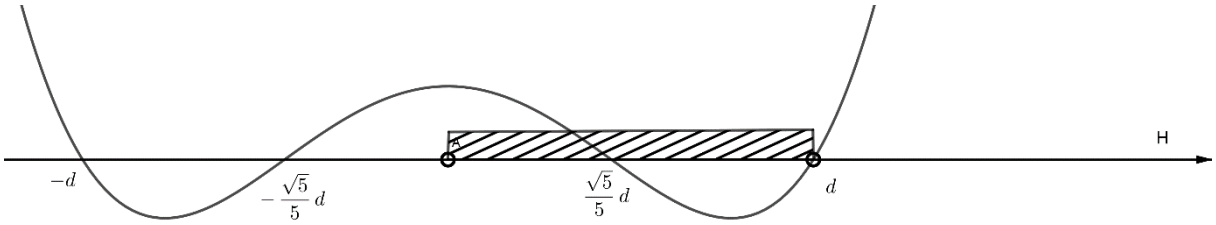
$H^2 = t$

$5t^2 - 6d^2t + d^4 = 0$

$t = \frac{1}{5}d^2 \quad t = d^2$

$H = -\frac{\sqrt{5}}{5}d, \quad H = \frac{\sqrt{5}}{5}d, \; H = -d, \; H = d$

Jedynym miejscem zerowym pochodnej w przedziale $(0, d)$ jest $H = \frac{\sqrt{5}}{5}d$.



$V'(H) > 0$ dla $H \in \left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}d\right)$ (funkcja *V* w tym przedziale rośnie),

$V'(H) < 0$ dla $H \in \left(\frac{\sqrt{5}}{5}d, d\right)$ (funkcja *V* w tym przedziale maleje).

Wnioskujemy, że funkcja *V* osiąga maksimum lokalne dla $H = \frac{\sqrt{5}}{5}d$. Z analizy monotoniczności funkcji *V* w dziedzinie wynika, że jest to jednocześnie największa wartość funkcji w przedziale $(0, d)$.

Ostrosłup ma największą objętość dla $H = \frac{\sqrt{5}}{5}d$, czyli dla $a = \frac{2\sqrt{2}}{5}d$. Największa objętość jest równa $V = \frac{8\sqrt{5}}{375}d^3$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap składa się z trzech części:

a) wyznaczenie długości promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa oraz pola podstawy w zależności od długości wysokości ostrosłupa

b) zapisanie objętości ostrosłupa jako funkcji zmiennej *H*:

$$V(H)=\frac{1}{6d^2}\left(d^4H-2d^2H^3+H^5\right)$$

c) określenie dziedziny funkcji *V*: $H\in(0,d)$.

Za każdą z części tego etapu zdający otrzymuje po **1 punkcie.**

Drugi etap składa się z trzech części:

a) wyznaczenie pochodnej

$V'(H)=\frac{1}{6d^2}\left(5H^4-6d^2H^2+d^4\right)$,

b) obliczenie miejsca zerowego pochodnej $H=\frac{\sqrt{5}}{5}d$,

c) uzasadnienie, że dla $H=\frac{\sqrt{5}}{5}d$ objętość ostrosłupa jest największa.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

Uwaga

Jeżeli zdający nie wyznaczy dziedziny funkcji *V*, to nie może otrzymać punktu za ostatnią część etapu drugiego (uzasadnienie).

- Trzeci etap.

  Obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa o największej objętości:

  $a=\frac{2\sqrt{2}}{5}d$. Wyznaczenie największej objętości ostrosłupa: $V=\frac{8\sqrt{5}}{375}d^3$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.