CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY

W ROKU SZKOLNYM 2017/2018

MATEMATYKA

POZIOM PODSTAWOWY

FORMUŁA DO 2014 („STARA MATURA”)

+

FORMUŁA OD 2015 („NOWA MATURA”)

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

ARKUSZ MMA-P1

CZERWIEC 2018

Egzaminatorze!

- Oceniaj prace zdających uczciwie i z zaangażowaniem.
- **Stosuj przyjęte zasady oceniania w sposób obiektywny**. Pamiętaj, że każda merytorycznie poprawna odpowiedź, spełniająca warunki określone w poleceniu, musi zostać pozytywnie oceniona, nawet jeżeli nie została przewidziana w przykładowych odpowiedziach w zasadach oceniania.
- Konsultuj niejednoznaczne rozwiązania zadań z innymi egzaminatorami lub przewodniczącym zespołu egzaminatorów. W przypadku niemożności osiągnięcia wspólnego stanowiska, rozstrzygajcie na korzyść zdającego.
- Przyznając punkty, nie kieruj się emocjami.
- Informuj przewodniczącego o wszystkich nieprawidłowościach zaistniałych w trakcie oceniania, w tym podejrzeń o niesamodzielność w pisaniu pracy.

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odp.	A	D	D	C	B	A	D	B	B	B	C	D	B	B	C	D	A	D	A	C	D	C	A	A	C

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $2x(1-x)+1-x<0$.

Rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.
Pierwszy etap polega na obliczeniu pierwiastków trójmianu kwadratowego.
Drugi etap polega na zapisaniu zbioru rozwiązań nierówności.

Realizacja pierwszego etapu

- wyłączamy czynnik $(1-x)$ przed nawias i zapisujemy lewą stronę nierówności w postaci iloczynowej $(1-x)(2x+1)<0$, a następnie zapisujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $y=(1-x)(2x+1)$

$$x_1=1 \text{ oraz } x_2=-\frac{1}{2}$$

albo

- wyłączamy czynnik $(1-x)$ przed nawias i zapisujemy lewą stronę nierówności w postaci iloczynowej $(1-x)(2x+1)<0$, a następnie zapisujemy alternatywę dwóch układów nierówności

$$\begin{cases}1-x>0\\2x+1<0\end{cases} \text{ lub } \begin{cases}1-x<0\\2x+1>0\end{cases}$$

i równoważnie

$$\begin{cases}x<1\\x<-\frac{1}{2}\end{cases} \text{ lub } \begin{cases}x>1\\x>-\frac{1}{2}\end{cases}$$

albo

- zapisujemy lewą stronę nierówności w postaci $-2x^2+x+1<0$ obliczamy wyróżnik tego trójmianu:

$\Delta=1-4\cdot(-2)\cdot 1=9$ i stąd $x_1=\frac{-1-3}{-4}=1$ oraz $x_2=\frac{-1+3}{-4}=-\frac{1}{2}$

albo

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu $x_1=1$, $x_2=-\frac{1}{2}$ lub zaznaczając je na wykresie.

Realizacja drugiego etapu

Zapisujemy zbiór rozwiązań nierówności: $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$.

Schemat oceniania
Zdający otrzymuje ..... 1 p.
gdy:

- obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ i na tym zakończy
  lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- zapisze alternatywę dwóch układów nierówności
$$\begin{cases} x < 1 \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x > 1 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$
  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy,

albo

- zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x) = 2x(1-x)+(1-x)$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- realizując pierwszy etap popełni błąd (ten sam błąd popełniony wielokrotnie traktujemy jak jeden błąd), ale otrzyma dwa różne pierwiastki trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje ..... 2 p.
gdy:

- zapisze zbiór rozwiązań nierówności: $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ lub
  $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$,
  lub $x < -\frac{1}{2}$ lub $x > 1$

albo

- sporządzi poprawną ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x < -\frac{1}{2}$, $x > 1$,

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

Zadanie 27. (0–2)

Wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = x^2 + bx + c$ jest parabola, na której leży punkt $A = (0, -5)$. Osią symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu $x = 7$. Oblicz wartości współczynników b i c.

Rozwiązanie (I sposób)
Ponieważ prosta o równaniu $x = 7$ jest osią symetrii paraboli, która jest wykresem funkcji f, więc pierwsza współrzędna wierzchołka tej paraboli jest równa 7, czyli

$$-\frac{b}{2a}=7,$$
$$-\frac{b}{2}=7.$$

Stąd $b=-14$.
Wykres funkcji przechodzi przez punkt $A=(0,-5)$, więc wyraz wolny *c* we wzorze funkcji jest równy $c=-5$.
Odpowiedź. Wartości współczynników *b* i *c* są równe: $b=-14$, $c=-5$.

Rozwiązanie (II sposób)
Ponieważ prosta o równaniu $x=7$ jest osią symetrii paraboli, która jest wykresem funkcji *f*, więc wzór funkcji możemy zapisać w postaci kanonicznej

$$f(x)=(x-7)^2+q.$$

Punkt $A=(0,-5)$ leży na tym wykresie, wiec $f(0)=-5$, czyli

$$-5=(0-7)^2+q,$$
$$-5=49+q,$$
$$q=-54.$$

Zatem $f(x)=(x-7)^2-54$. Przekształcając tę postać kanoniczną do postaci ogólnej, otrzymujemy

$$f(x)=x^2-14x+49-54,$$
$$f(x)=x^2-14x-5.$$

Odpowiedź. Wartości współczynników *b* i *c* są równe: $b=-14$, $c=-5$.

Rozwiązanie (III sposób)
Ponieważ prosta o równaniu $x=7$ jest osią symetrii paraboli, która jest wykresem funkcji *f*, więc jeśli punkt $A=(0,-5)$ leży na tej paraboli, to jego obraz w symetrii osiowej względem tej prostej również leży na tej paraboli. Obrazem punktu $A=(0,-5)$ w tej symetrii jest punkt $A'=(14,-5)$.
Zatem $f(0)=-5$ i $f(14)=-5$, czyli

$$\begin{cases}0^2+b\cdot 0+c=-5\\14^2+b\cdot 14+c=-5\end{cases},$$
$$\begin{cases}c=-5\\14^2+14b-5=-5\end{cases},$$
$$\begin{cases}c=-5\\14b=-14^2\end{cases},$$
$$\begin{cases}c=-5\\b=-14\end{cases}.$$

Odpowiedź. Wartości współczynników *b* i *c* są równe: $b=-14$, $c=-5$.

Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.
gdy

- obliczy wartość współczynnika *b*: $b=-14$

albo

- obliczy lub poda wartość współczynnika c: $c=-5$

albo

- zapisze układ równań z niewiadomymi b i c: $0^2+b\cdot 0+c=-5$ i $14^2+b\cdot 14+c=-5$

albo

- zapisze wzór funkcji f w postaci $f(x)=(x-7)^2+q$ oraz równanie $-5=(0-7)^2+q$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

Zdający otrzymuje ..... 2 p.
gdy obliczy wartości współczynników b i c: $b=-14$, $c=-5$.

Zadanie 28. (0–2)

Wykaż, że reszta z dzielenia sumy kwadratów czterech kolejnych liczb naturalnych przez 8 jest równa 6.

Rozwiązanie

Niech n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ będą czterema kolejnymi liczbami naturalnymi. Sumujemy kwadraty tych liczb i odpowiednio tę sumę porządkujemy:

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2=4n^2+12n+14=$$

$$=4n^2+12n+8+6=4\left(n^2+3n+2\right)+6=4(n+1)(n+2)+6$$

Oczywiście liczba postaci $4(n+1)(n+2)$ jest podzielna przez 4. Ponadto $n+1$ i $n+2$ to dwie kolejne liczby całkowite, więc jedna z nich jest parzysta. Zatem iloczyn $4(n+1)(n+2)$ jest podzielny przez 4 i przez 2, czyli jest podzielny przez 8. Stąd wynika, że liczba $4(n+1)(n+2)+6$ przy dzieleniu przez 8 daje resztę równą 6. To kończy dowód.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.
gdy zapisze sumę kwadratów czterech kolejnych liczb naturalnych w postaci:

$$4\left(n^2+3n+2\right)+6$$

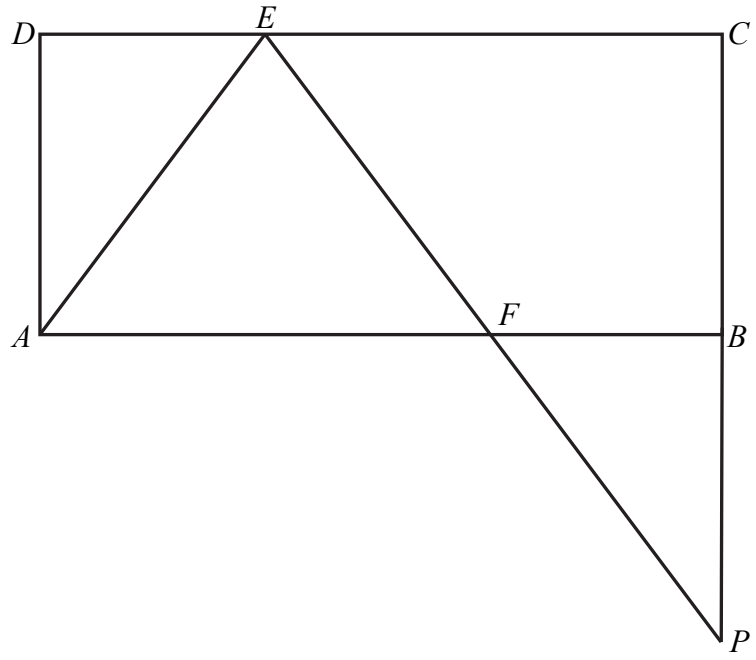
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ..... 2 p.
gdy przeprowadzi pełne, poprawne rozumowanie.

Uwaga:
Jeśli zdający sprawdza prawdziwość twierdzenia dla sumy kwadratów konkretnych czterech liczb naturalnych, to otrzymuje **0 punktów**.

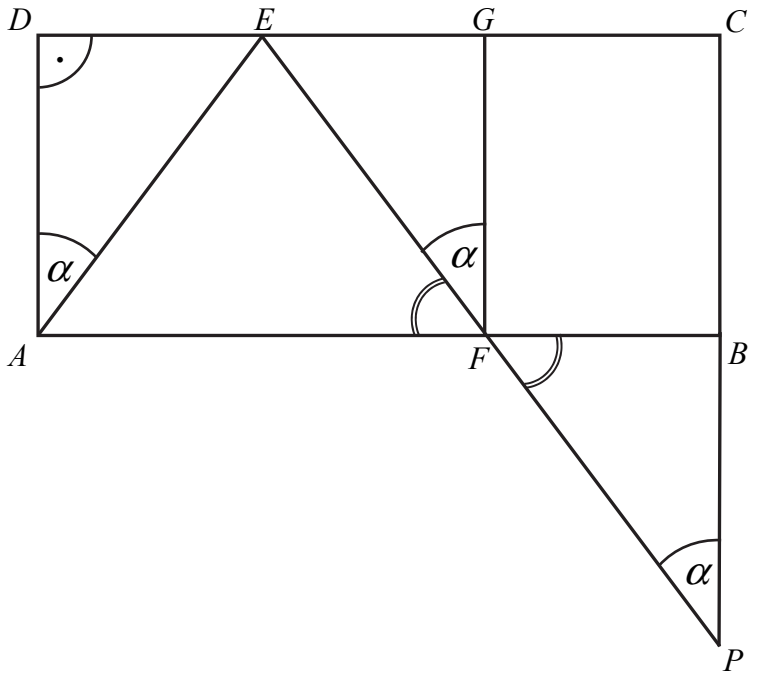
Zadanie 29. (0–2)

Dany jest prostokąt *ABCD*. Na boku *CD* tego prostokąta wybrano taki punkt *E*, że $|EC| = 2|DE|$, a na boku *AB* wybrano taki punkt *F*, że $|BF| = |DE|$. Niech *P* oznacza punkt przecięcia prostej *EF* z prostą *BC* (zobacz rysunek). Wykaż, że trójkąty *AED* i *FPB* są przystające.



Rozwiązanie (I sposób) „*cecha kąt-bok-kąt przystawania*”

Dorysowujemy odcinek *FG*, taki że punkt *G* jest środkiem odcinka *EC*. Ponieważ $|EC| = 2|DE|$, więc otrzymujemy równość $|DE| = |EG| = |GC|$.



Zatem $|GC|=|FB|$, a skoro $|\sphericalangle GCB|=|\sphericalangle FBC|=90^\circ$, więc $|\sphericalangle FGC|=90^\circ$, skąd wynika, że trójkąt FEG jest prostokątny.

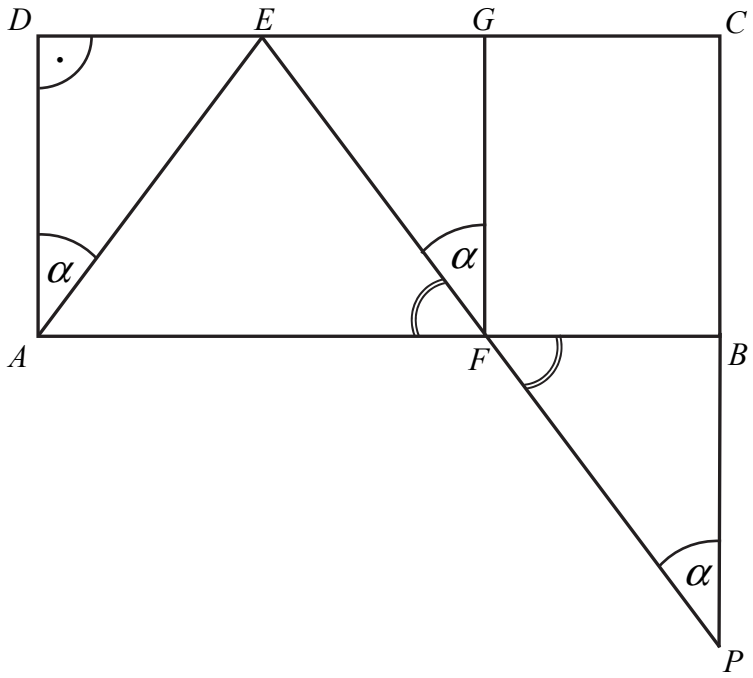
Ponieważ $|AD|=|FG|$, $|\sphericalangle ADE|=|\sphericalangle FGE|=90^\circ$ i $|DE|=|EG|$, więc z cechy *bkb* wnioskujemy, że trójkąty AED i FEG są przystające. Niech $|\sphericalangle DAE|=\alpha$. Wtedy z przystawania tych trójkątów wnosimy, że $|\sphericalangle EFG|=\alpha$. Ponieważ odcinki PC i FG są równoległe, więc $|\sphericalangle FPB|=|\sphericalangle EFG|=\alpha$ (kąty odpowiadające).

Ponieważ $|\sphericalangle FPB|=|\sphericalangle EFG|=\alpha$ $|BF|=|DE|$, $|\sphericalangle PBF|=90^\circ=|\sphericalangle ADE|$ oraz , zatem na mocy cechy *kbk* trójkąty AED i PFB są przystające.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania
Zdający otrzymuje ..... 1 p.
gdy uzasadni, że trójkąty AED i FEG są trójkątami przystającymi i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.
Zdający otrzymuje ..... 2 p.
gdy przeprowadzi pełne, poprawne rozumowanie.

Uwaga:
Jeżeli zdający wprowadza do zadania dodatkowe założenia niewynikające z treści tego zadania
i korzysta z tych założeń, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Rozwiązanie (II sposób) – „*przechodniość przystawania*”
Dorysowujemy odcinek FG, taki, że punkt G jest środkiem odcinka EC. Ponieważ $|EC|=2|DE|$, więc otrzymujemy równość $|DE|=|EG|=|GC|$.



Zatem $|GC|=|FB|$, a skoro $|\sphericalangle GCB|=|\sphericalangle FBC|=90^\circ$, więc $|\sphericalangle FGC|=90^\circ$, skąd wynika, że trójkąt FEG jest prostokątny.

Ponieważ $|AD|=|FG|$, $|\sphericalangle ADE|=|\sphericalangle FGE|=90^\circ$ i $|DE|=|EG|$, więc z cechy *bkb* wnioskujemy, że trójkąty *AED* i *FEG* są przystające.
Niech $|\sphericalangle DAE|=\alpha$. Zatem $|\sphericalangle EFG|=\alpha$. Ponieważ $FG \| PC$, więc $|\sphericalangle FPB|=\alpha=|\sphericalangle EFG|$. Trójkąty *EFG* i *FPB* są trójkątami przystającymi na mocy cechy *kbk*, gdyż są to trójkąty prostokątne, mają jeden kąt ostry równej miary oraz $|BF|=|EG|$. Skoro trójkąt *AED* jest przystający do trójkąta *FEG*, a trójkąt *FEG* jest przystający do trójkąta *PFB*, więc z przechodniości relacji przystawania wynika, że trójkąty *AED* i *PBF* są przystające.

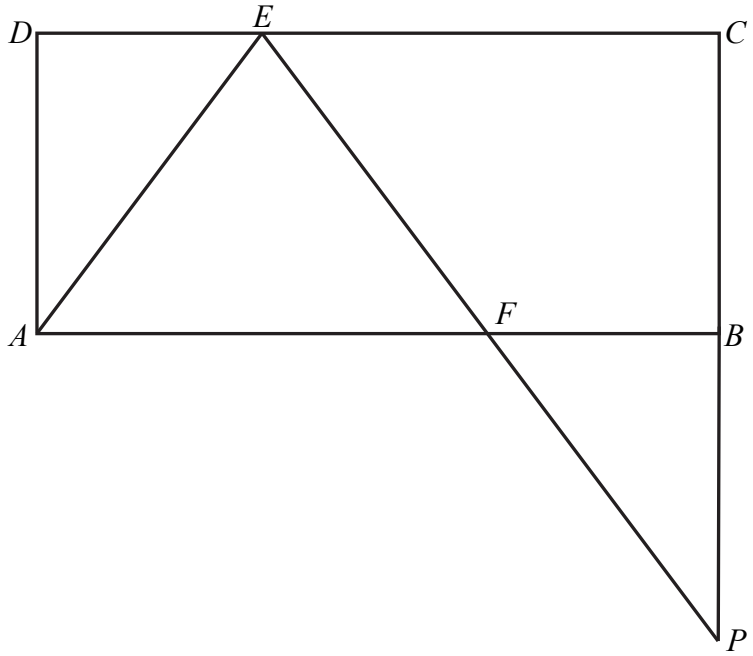
Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.
gdy uzasadni, że trójkąty *AED* i *FEG* są trójkątami przystającymi i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ..... 2 p.
gdy przeprowadzi pełne, poprawne rozumowanie.

Uwaga:
Jeżeli zdający wprowadza do zadania dodatkowe założenia niewynikające z treści tego zadania
i korzysta z tych założeń, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Rozwiązanie (III sposób) – *„podobieństwo trójkątów”*
Trójkąty *PBF* i *PCE* są podobne na podstawie cechy *kkk*, bo są to trójkąty prostokątne i kąt *FPB* jest wspólnym kątem obu tych trójkątów.



Skala podobieństwa tych trójkątów jest równa 2, gdyż z treści zadania wiadomo, że $|BF|=|DE|$ oraz $|EC|=2|DE|$. Wynika stąd, że $|CP|=2|BP|$, a zatem $|PB|=|BC|=|AD|$. Ponieważ zachodzą równości

$$|PB|=|AD|,\ |\sphericalangle PBF|=90^\circ=|\sphericalangle ADE|,\ |BF|=|DE|,$$

więc trójkąty *AED* i *PBF* są przystające na mocy cechy *bkb* przystawania trójkątów.
To kończy dowód.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania
Zdający otrzymuje ..... 1 p.
gdy uzasadni, że trójkąty PBF i PCE są trójkątami podobnymi i skala podobieństwa tych trójkątów
jest równa 2 i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ..... 2 p.
gdy przeprowadzi pełne, poprawne rozumowanie.

Uwaga:
Jeżeli zdający wprowadza do zadania dodatkowe założenia niewynikające z treści tego zadania
i korzysta z tych założeń, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Zadanie 30. (0–2)

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Rozwiązanie I sposób
Równanie $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$ podnosimy obustronnie do kwadratu
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=2$, a następnie korzystając z tożsamości $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
otrzymujemy $1+2\sin\alpha\cos\alpha=2$, zatem $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

Następnie korzystamy ze związku między funkcjami tego samego kąta $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
i przekształcamy wyrażenie $\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$:

$$\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$

Schemat oceniania
Zdający otrzymuje ……1 p.
gdy

- przekształci wyrażenie $\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ do postaci $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$

albo

- wyznaczy wartość wyrażenia $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.
Zdający otrzymuje ……2 p.
gdy obliczy wartość wyrażenia $\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$: 2.

Rozwiązanie II sposób

Z równania $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$ wyznaczamy jedną z funkcji trygonometrycznych w zależności od drugiej, np. sinus kąta w zależności od cosinusa kąta: $\sin\alpha=\sqrt{2}-\cos\alpha$.
Następnie korzystając z tożsamości $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ otrzymujemy:

$$\left(\sqrt{2}-\cos\alpha\right)^2+\cos^2\alpha=1, \text{ stąd otrzymujemy równanie kwadratowe}$$

$$2\cos^2\alpha-2\sqrt{2}\cos\alpha+1=0.$$

Równanie można zapisać w postaci $\left(\sqrt{2}\cos\alpha-1\right)^2=0$,

zatem rozwiązaniem tego równania jest $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Stąd $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Następnie korzystamy ze związku między funkcjami tego samego kąta $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

i przekształcamy wyrażenie $\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Otrzymujemy $\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2$.

Schemat oceniania
Zdający otrzymuje ……1 p.
gdy

- przekształci wyrażenie $\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ do postaci $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$,

albo

- wyznaczy wartość $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.
Zdający otrzymuje ……2 p.
gdy obliczy wartość wyrażenia $\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$: 2.

Zadanie 31. (0–2)

Rzucamy cztery razy symetryczną monetą. Po przeprowadzonym doświadczeniu zapisujemy liczbę uzyskanych orłów (od 0 do 4) i liczbę uzyskanych reszek (również od 0 do 4). Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w tych czterech rzutach liczba uzyskanych orłów będzie większa niż liczba uzyskanych reszek.

Rozwiązanie (I sposób)

Zbiór zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego zawiera wszystkie ciągi czteroelementowe, postaci $\left(r_1,r_2,r_3,r_4\right)$, w których r_i oznacza wyrzucenie orła (O) albo

wyrzucenie reszki (R) w i-tym rzucie , dla $i=1, 2, 3, 4$. Jest to model klasyczny i liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa

$$|\Omega| = 2^4 = 16 .$$

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że w tych czterech rzutach wypadnie więcej orłów niż reszek. Oznacza to, że otrzymamy cztery orły albo trzy orły i jedną reszkę.
Zdarzeniu A sprzyja zatem 5 zdarzeń elementarnych:

$$(O,O,O,R)\,,\ (O,O,R,O)\,(O,R,O,O)\,,\ (R,O,O,O)\,,\ (O,O,O,O).$$

Szukane prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A jest więc równe:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{16}.$$

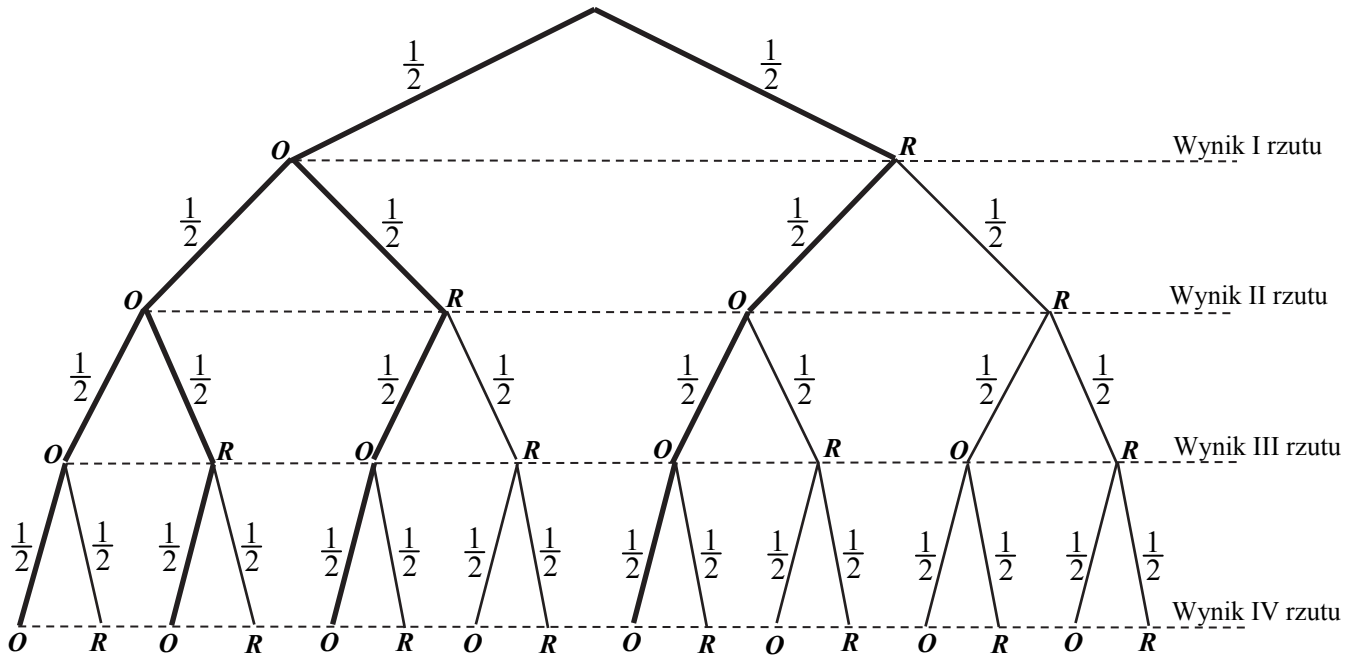
Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.
gdy:
zapisze, że liczba wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia jest równa $2^4 = 16$
albo
wypisze poprawnie 5 zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A
i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ..... 2 p.
gdy obliczy i zapisze, że prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A jest równe $\frac{5}{16}$.

Uwaga:
Jeżeli zdający błędnie zapisze wynik $P(A)$ jako liczbę większą od 1 lub mniejszą od 0, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Rozwiązanie (II sposób) „metoda drzewka”
Rysujemy czteroetapowe drzewko ilustrujące dane doświadczenie.



Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że w tych czterech rzutach wypadnie więcej orłów niż reszek. Zaznaczamy (linia pogrubiona) wszystkie gałęzie, które dotyczą szukanego zdarzenia, czyli ciągów:

$$(O,O,O,O),\ (O,O,O,R),\ (O,O,R,O)\ (O,R,O,O),\ (R,O,O,O).$$

Zatem szukane prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A jest równe:

$$P(A)=5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{16}.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.
gdy narysuje drzewko tego doświadczenia (**wystarczy istotnych 5 gałęzi**) oraz przynajmniej wzdłuż jednej gałęzi wpisze poprawnie prawdopodobieństwa i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

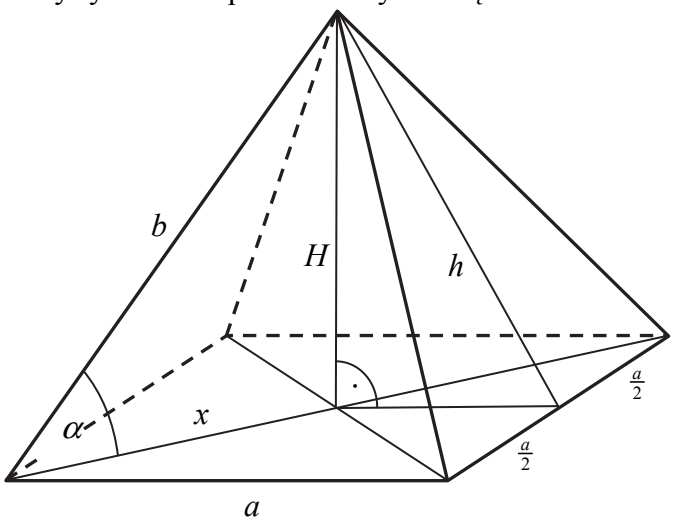
Zdający otrzymuje ..... 2 p.
gdy obliczy i zapisze, że prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A jest równe $\frac{5}{16}$.

Uwaga:
Jeżeli zdający błędnie zapisze wynik $P(A)$ jako liczbę większą od 1 lub mniejszą od 0, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Zadanie 32. (0–5)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o wysokości $H=16$. Cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa jest równy $\frac{3}{5}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

Rozwiązanie (I sposób)
Sporządzamy pomocniczy rysunek i wprowadzamy niezbędne oznaczenia.



Obliczymy długości dwóch boków trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej b oraz przyprostokątnych długości 16 i x. Zapisujemy w tym celu układ równań:

$$x^2+16^2=b^2 \text{ i } \cos\alpha=\frac{x}{b}=\frac{3}{5}.$$

Następnie zapisujemy równanie z jedną niewiadomą, np. $\left(\frac{3}{5}b\right)^2+16^2=b^2$, skąd wynika, że $b=20$.

A zatem $x=12$. Teraz obliczamy długość krawędzi podstawy ostrosłupa: $\frac{a\sqrt{2}}{2}=12$, stąd $a=12\sqrt{2}$. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość ściany bocznej: $h^2+\left(6\sqrt{2}\right)^2=20^2$, stąd $h=2\sqrt{82}$. Obliczamy wreszcie pole powierzchni bocznej ostrosłupa: $P_b=4\cdot\frac{1}{2}ah=48\sqrt{164}=96\sqrt{41}$.

Rozwiązanie (II sposób)
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku w I sposobie rozwiązania. Obliczamy długości dwóch boków trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej b oraz przyprostokątnych długości 16 oraz x. Tym razem obliczymy sinus kąta α, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, a następnie zapisujemy zależność $\frac{4}{5}=\frac{16}{b}$, z której otrzymujemy $b=20$. Następnie, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, zapisujemy równanie $x^2+16^2=20^2$, a stąd $x=12$. Teraz obliczamy długość krawędzi podstawy ostrosłupa: $a\sqrt{2}=24$, stąd $a=12\sqrt{2}$. Korzystając ponownie z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość ściany bocznej: $h^2+\left(6\sqrt{2}\right)^2=20^2$, stąd $h=2\sqrt{82}$. Obliczamy pole powierzchni bocznej ostrosłupa

$$P_b=4\cdot\frac{1}{2}ah=48\sqrt{164}=96\sqrt{41}.$$

Rozwiązanie (III sposób)
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku w I sposobie rozwiązania. Najpierw obliczymy długość boku x trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej b oraz przyprostokątnych długości x i 16. Korzystamy z faktu, że $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ i obliczamy najpierw sinus, a następnie tangens kąta α, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$. Teraz zapisujemy zależność $\operatorname{tg}\alpha=\frac{H}{x}=\frac{16}{x}$, z której wynika, że $\frac{16}{x}=\frac{4}{3}$, czyli $x=12$. Następnie z równości $a\sqrt{2}=24$ obliczamy długość krawędzi podstawy $a=12\sqrt{2}$. Wreszcie z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość ściany bocznej ostrosłupa: $h^2=H^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$ i stąd $h=2\sqrt{82}$. Szukane pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest zatem równe $P_b=4\cdot\frac{1}{2}ah=48\sqrt{164}=96\sqrt{41}$.

Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania
Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.
Zdający:

- zapisze równość wynikającą z treści zadania oraz z definicji cosinusa kąta ostrego, np. $\frac{x}{b}=\frac{3}{5}$

albo

- zapisze równość wynikającą z treści zadania oraz twierdzenia Pitagorasa $x^2+16^2=b^2$,

albo

- obliczy sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$

albo

- obliczy tangens kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{4}{3}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą:

- $\left(\frac{3}{5}b\right)^2+16^2=b^2$

albo

- $\frac{4}{5}=\frac{16}{b}$

albo

- $\frac{16}{x}=\frac{4}{3}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.

Zdający obliczy długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa $a=12\sqrt{2}$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne . ..... 4 p.

Zdający obliczy wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa $h=2\sqrt{82}$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne ..... 5 p.

Zdający obliczy i zapisze, że pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe

$$P_b=4\cdot\frac{1}{2}ah=48\sqrt{164}=96\sqrt{41}.$$

Uwagi:

1. Akceptujemy poprawnie zastosowane zaokrąglenia liczb rzeczywistych.

2. Jeżeli zdający założy, że $x=3$ oraz $b=5$ i doprowadzi rozwiązanie do końca otrzymując

$$P_b=4\cdot\frac{1}{2}ah=2\cdot3\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}=6\sqrt{14},$$

to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt**.

3. Jeżeli zdający przyjmuje, że podany kąt jest kątem nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy, otrzymując $a=12$ oraz $h=20$ i obliczy pole powierzchni bocznej $P_b=4\cdot\frac{1}{2}ah=2\cdot24\cdot20=960$, to za takie rozwiązanie może otrzymać maksymalnie **2 punkty**.

4. Jeżeli zdający przyjmuje, że powierzchnia boczna tego ostrosłupa jest trójkątem równobocznym, to za takie rozwiązanie może otrzymać maksymalnie **3 punkty**.

5. Jeżeli zdający zapisuje błędną zależność wynikającą z definicji cosinusa danego kąta, to za całe rozwiązanie może otrzymać maksymalnie **3 punkty**.
6. Jeżeli zdający popełnia błędy nieprzekreślające poprawności rozumowania, np.: błędy rachunkowe, błędy w przepisywaniu, itp. i doprowadza rozwiązanie konsekwentnie do końca, to może otrzymać maksymalnie **4 punkty**.

Zadanie 33. (0-4)

W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla liczb naturalnych $n \geq 1$, wyraz szósty jest liczbą dwa razy większą od wyrazu piątego, a suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa $S_{10} = \frac{15}{4}$. Oblicz wyraz pierwszy oraz różnicę tego ciągu.

Rozwiązanie (I sposób)

Oznaczmy rozpatrywany ciąg arytmetyczny przez (a_n), gdzie $n \geq 1$, a różnicę tego ciągu przez r.

Zapisujemy zależność między wyrazami piątym i szóstym: $a_6 = 2a_5$. Stąd $a_1 + 5r = 2(a_1 + 4r)$, czyli $a_1 = -3r$.

Zapisujemy kolejną zależność

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{15}{4},$$

a stąd

$$5(2a_1 + 9r) = \frac{15}{4}, \text{ czyli } 2a_1 + 9r = \frac{3}{4}.$$

Zapisujemy równanie z jedną niewiadomą, $2 \cdot (-3r) + 9r = \frac{3}{4}$, skąd otrzymujemy $r = \frac{1}{4}$.

Ostatecznie więc $r = \frac{1}{4}$ i $a_1 = -\frac{3}{4}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.

Zdający zapisze równanie z dwiema niewiadomymi a_1 i r, np.

$$a_1 + 5r = 2(a_1 + 4r) \text{ lub } \frac{2a_1 + 9r}{2} \cdot 10 = \frac{15}{4}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.

Zdający zapisze dwa równania z dwiema niewiadomymi a_1 i r,

$$\text{np. } a_1 + 5r = 2(a_1 + 4r) \text{ i } \frac{2a_1 + 9r}{2} \cdot 10 = \frac{15}{4}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą np. $2 \cdot (-3r) + 9r = \frac{3}{4}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne ..... 4 p.

Zdający obliczy i zapisze, że $r=\frac{1}{4}$ i $a_1=-\frac{3}{4}$.

Uwaga:
Jeżeli zdający popełnia błędy nieprzekreślające poprawności rozumowania, np.: błędy rachunkowe, błędy w przepisywaniu, itp. i doprowadza rozwiązanie konsekwentnie do końca, to może otrzymać maksymalnie **3 punkty**.

Rozwiązanie (II sposób)

Oznaczmy rozpatrywany ciąg arytmetyczny przez (a_n), gdzie $n\geq 1$, a różnicę tego ciągu przez r.

Zapisujemy zależność między wyrazami piątym i szóstym: $a_6=2a_5$. Stąd $a_5+r=2a_5$, czyli $a_5=r$.

Zauważamy, że

$$a_1=a_5-4r \text{ oraz } a_{10}=a_5+5r$$

i zapisujemy kolejną zależność

$$S_{10}=\frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot 10=\frac{a_5-4r+a_5+5r}{2}\cdot 10=\frac{15}{4}.$$

Po uwzględnieniu zależności $a_5=r$, mamy

$$\frac{-3r+6r}{2}\cdot 10=\frac{15}{4}, \text{ czyli } r=\frac{1}{4}.$$

Stąd wynika, że $a_1=a_5-4r=r-4r=-3r=-3\cdot\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.

Zdający zapisze równanie z dwiema niewiadomymi a_5 i r, np.

$$a_5+r=2a_5 \text{ lub równanie } \frac{a_5-4r+a_5+5r}{2}\cdot 10=\frac{15}{4}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.

Zdający zapisze dwa równania z dwiema niewiadomymi a_5 i r,

$$\text{np. } a_5+r=2a_5 \text{ i równanie } \frac{a_5-4r+a_5+5r}{2}\cdot 10=\frac{15}{4}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą np.

$$\frac{-3r+6r}{2}\cdot 10=\frac{15}{4} \text{ lub } a_5+\left(\frac{3}{4}-2a_5\right)=2a_5$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne ..... 4 p.

Zdający obliczy i zapisze, że $r=\frac{1}{4}$ i $a_1=-\frac{3}{4}$.

Uwaga:
Jeżeli zdający popełnia błędy nieprzekreślające poprawności rozumowania, np.: błędy rachunkowe, błędy w przepisywaniu, itp. i doprowadza rozwiązanie konsekwentnie do końca, to może otrzymać maksymalnie **3 punkty**.

Zadanie 34. (0-4)

Punkty $A=(-1,1)$ i $C=(1,9)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego *ABC*, w którym $|AC|=|BC|$. Podstawa *AB* tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$. Oblicz współrzędne wierzchołka *B* tego trójkąta.

Rozwiązanie (I sposób)

Prosta przechodząca przez punkt $C=(1,9)$ i prostopadła do prostej *AB* zawiera wysokość *CD* trójkąta *ABC*. Współczynnik kierunkowy a_{CD} tej prostej jest równy

$$a_{CD}=-\frac{1}{a_{AB}}=-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2.$$

Zatem prosta *CD* ma równanie postaci

$$y=-2(x-1)+9,$$
$$y=-2x+11.$$

Obliczmy współrzędne spodka *D* wysokości *CD*, rozwiązując układ równań

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \text{ oraz } y=-2x+11.$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=-2x+11,$$
$$\frac{5}{2}x=\frac{19}{2},$$
$$x=\frac{19}{5}.$$

Zatem $y=-2\cdot\frac{19}{5}+11=\frac{17}{5}$, więc $D=\left(\frac{19}{5},\frac{17}{5}\right)=\left(3\frac{4}{5},3\frac{2}{5}\right)=(3{,}8;\ 3{,}4)$.

Ponieważ trójkąt *ABC* jest równoramienny i $|AC|=|BC|$, więc punkt *D* jest środkiem podstawy *AB* tego trójkąta. Ze wzorów na współrzędne środka odcinka otrzymujemy

$$\frac{x_A+x_B}{2}=x_D \text{ oraz } \frac{y_A+y_B}{2}=y_D,$$
$$\frac{-1+x_B}{2}=\frac{19}{5} \text{ oraz } \frac{1+y_B}{2}=\frac{17}{5},$$
$$x_B=\frac{43}{5}=8\frac{3}{5} \text{ oraz } y_B=\frac{29}{5}=5\frac{4}{5}.$$

Zatem $B=\left(\frac{43}{5},\frac{29}{5}\right)=\left(8\frac{3}{5},5\frac{4}{5}\right)$.

Uwaga
Zdający może wyznaczyć współrzędne punktu *B,* korzystając z równości wektorów:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$$

$$\overrightarrow{AD}=\left[\frac{19}{5}+1,\frac{17}{5}-1\right]=\left[\frac{24}{5},\frac{12}{5}\right] \text{ i } \overrightarrow{DB}=\left[x_B-\frac{19}{5},y_B-\frac{17}{5}\right]$$

$$x_B = \frac{19}{5} + \frac{24}{5} = \frac{43}{5} = 8\frac{3}{5} \text{ oraz } y_B = \frac{12}{5} + \frac{17}{5} = \frac{29}{5} = 5\frac{4}{5}.$$

Rozwiązanie (II sposób)

Punkt B leży na prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, więc współrzędne tego punktu można zapisać w postaci $B = \left(x_B, \frac{1}{2}x_B + \frac{3}{2}\right)$.

Równość $|AC| = |BC|$ możemy, korzystając ze wzoru na długość odcinka, zapisać w postaci

$$\sqrt{\left(1-(-1)\right)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{(1-x_B)^2 + \left(9 - \left(\frac{1}{2}x_B + \frac{3}{2}\right)\right)^2},$$

$$\left(\sqrt{68}\right)^2 = \left(\sqrt{(1-x_B)^2 + \left(9 - \left(\frac{1}{2}x_B + \frac{3}{2}\right)\right)^2}\right)^2,$$

$$68 = (1-x_B)^2 + \left(\frac{15}{2} - \frac{1}{2}x_B\right)^2,$$

$$68 = 1 - 2x_B + x_B{}^2 + \frac{225}{4} - \frac{15}{2}x_B + \frac{1}{4}x_B{}^2,$$

$$\frac{5}{4}x_B{}^2 - \frac{19}{2}x_B - \frac{43}{4} = 0,$$

$$5x_B{}^2 - 38x_B - 43 = 0.$$

$$\Delta = (-38)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-43) = 2304,\ \sqrt{\Delta} = \sqrt{2304} = 48,$$

$$x_B = \frac{38-48}{2 \cdot 5} = -1 \text{ lub } x_B = \frac{38+48}{2 \cdot 5} = \frac{86}{10} = \frac{43}{5} = 8\frac{3}{5}.$$

Pierwsze z otrzymanych rozwiązań to współrzędna wierzchołka A, zatem $x_B = \frac{43}{5} = 8\frac{3}{5}$, więc współrzędne punktu B są równe

$$B = \left(\tfrac{43}{5}, \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{43}{5} + \tfrac{3}{2}\right) = \left(\tfrac{43}{5}, \tfrac{43+15}{10}\right) = \left(\tfrac{43}{5}, \tfrac{58}{10}\right) = \left(\tfrac{43}{5}, \tfrac{29}{5}\right) = \left(8\tfrac{3}{5}, 5\tfrac{4}{5}\right).$$

Rozwiązanie (III sposób)

Punkt B jest punktem przecięcia okręgu o środku w punkcie C i promieniu $|AC|$ z prostą AB o równaniu $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Obliczamy długość promienia okręgu

$$r = |AC| = \sqrt{\left(1-(-1)\right)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

Zatem równanie okręgu możemy zapisać w postaci

$$(x-1)^2 + (y-9)^2 = 68.$$

Współrzędne punktu B obliczamy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-9)^2 = 68 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$(x-1)^2 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - 9\right)^2 = 68$$

$$(x-1)^2+\left(\frac{1}{2}x-\frac{15}{2}\right)^2=68$$

$$x^2-2x+1+\frac{1}{4}x^2-\frac{15}{2}x+\frac{225}{4}=68,$$

$$5x^2-38x-43=0,$$

$$\Delta=(-38)^2-4\cdot5\cdot(-43)=2304,\ \sqrt{\Delta}=\sqrt{2304}=48,$$

$$x=\frac{38-48}{2\cdot5}=-1 \text{ lub } x=\frac{38+48}{2\cdot5}=\frac{86}{10}=\frac{43}{5}=8\frac{3}{5}.$$

Pierwsze z otrzymanych rozwiązań to współrzędna wierzchołka A, zatem $x_B=\frac{43}{5}=8\frac{3}{5}$, więc współrzędne punktu B są równe

$$B=\left(\tfrac{43}{5},\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{43}{5}+\tfrac{3}{2}\right)=\left(\tfrac{43}{5},\tfrac{43+15}{10}\right)=\left(\tfrac{43}{5},\tfrac{58}{10}\right)=\left(\tfrac{43}{5},\tfrac{29}{5}\right)=\left(8\tfrac{3}{5},5\tfrac{4}{5}\right).$$

Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.

Zdający

- zapisze, że spodek D wysokości CD jest środkiem boku AB trójkąta ABC

albo

- zapisze równanie prostej CD: $y=-2x+11$

albo

- zapisze współrzędne punktu B w zależności od jednej zmiennej, np.: $B=\left(x_B,\frac{1}{2}x_B+\frac{3}{2}\right)$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- zapisze równanie okręgu o środku w punkcie C i promieniu $|AC|$, np.: $(x-1)^2+(y-9)^2=68$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.

Zdający

- obliczy współrzędne spodka D wysokości CD trójkąta ABC: $D=\left(\frac{19}{5},\frac{17}{5}\right)$

albo

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.: $\left(\sqrt{68}\right)^2=\left(\sqrt{(1-x_B)^2+\left(9-\left(\frac{1}{2}x_B+\frac{3}{2}\right)\right)^2}\right)^2$

albo

- zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases}\sqrt{(1-x_B)^2+(9-y_B)^2}=\sqrt{68}\\ y_B=\frac{1}{2}x_B+\frac{3}{2}\end{cases}$$

albo

- zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi (równanie okręgu i prostej):

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-9)^2=68\\ y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\end{cases}$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.
Zdający

- zapisze układ równań pozwalający obliczyć współrzędne wierzchołka B, np.:
$\frac{-1+x_B}{2}=\frac{19}{5}$ oraz $\frac{1+y_B}{2}=\frac{17}{5}$

albo

- zapisze równanie kwadratowe z jedną niewiadomą w postaci uporządkowanej, np.:
$5x_B^2-38x_B-43=0$.

albo

- zapisze równanie kwadratowe z jedną niewiadomą w postaci uporządkowanej, np.:
$\frac{5}{4}x^2-\frac{19}{2}x-\frac{43}{4}=0$

albo

- zapisze równość wektorów pozwalającą obliczyć współrzędne wierzchołka B, np.:
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$ oraz $\overrightarrow{AD}=\left[\frac{24}{5},\frac{12}{5}\right]$ i $\overrightarrow{DB}=\left[x_B-\frac{19}{5},y_B-\frac{17}{5}\right]$.

Rozwiązanie pełne ..... 4 p.
Zdający obliczy współrzędne wierzchołka B: $B=\left(8\frac{3}{5},5\frac{4}{5}\right)$.